

Построение солитонных решений

Докладчик: Андреев Иван Андреевич

Научный руководитель: д. ф.-м. н. Я. М. Шнир

1. Планарная модель Скирма: $\vec{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{\kappa^2}{4} (\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi})^2 - \mu^2 (1 - \phi_3) \quad \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1 \quad \vec{\phi}(\infty) = (0, 0, 1)$$

Функционал энергии:

$$E = \int \left[\frac{1}{2} \partial_i \vec{\phi} \cdot \partial_i \vec{\phi} + \frac{\kappa^2}{2} (\partial_x \vec{\phi} \times \partial_y \vec{\phi})^2 + \mu^2 (1 - \phi_3) \right] d^2x$$

Топологический заряд:

$$Q = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{\phi} \cdot (\partial_x \vec{\phi} \times \partial_y \vec{\phi}) d^2x$$

1. Планарная модель Скирма: $\vec{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$

Анзац рациональных отображений:

$$\vec{\phi}(r, \theta) = \left(\sin f(r) \frac{\operatorname{Re} W(z)}{|W(z)|}, \sin f(r) \frac{\operatorname{Im} W(z)}{|W(z)|}, \cos f(r) \right) \quad W(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)}$$

Уравнение на функцию $f(r)$:

$$\left(r + \frac{Q^2 \kappa^2 \sin^2 f}{r} \right) f'' + \left(1 - \frac{Q^2 \kappa^2 \sin^2 f}{r^2} + \frac{Q^2 \kappa^2 \sin f \cos f}{r} f' \right) f' - \frac{Q^2 \sin f \cos f}{r} - \mu^2 r \sin f = 0$$

Для $Q = 1$ и $Q = 2$ удобно взять $W = z^Q$. Для $Q \geq 3$ использовался следующий анзац

$$W_{total}(z) = \sum_{k=0}^{Q-1} \tan \left(\frac{f_1(|z - z_k|)}{2} \right) \exp(-i \arg(z - z_k) + i \delta_k)$$

1. Планарная модель Скирма: $\vec{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$

Для $Q = 4$ центры располагались на вершинах правильного Q -угольника на окружности радиуса R :

$$z_k = R \exp\left(i \frac{2\pi k}{Q}\right) \quad k = 1, 2, \dots, Q$$

Для $Q = 3$ центры располагались в цепочку вдоль одной оси:

$$z_k = -\frac{(Q-1)d}{2} + kd, \quad k = 0, 1, \dots, Q-1$$

где d — расстояние между центрами соседних скирмионов.

1. Планарная модель Скирма: $\vec{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$

Алгоритм градиентного спуска

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \tau} = \vec{F} + (\vec{\phi} \cdot \vec{F}) \vec{\phi}$$

где

$$F = -\frac{\delta E}{\delta \vec{\phi}} = \nabla^2 \vec{\phi} + \kappa^2 \partial_i \left[\partial_j \vec{\phi} \times (\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi}) \right] + \mu^2 \vec{n}_3$$

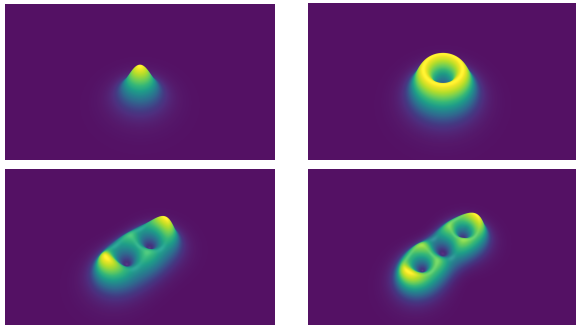
Дискретизация этого уравнения осуществляется с использованием явной схемы Эйлера первого порядка:

$$\vec{\phi}_{i,j}^* = \vec{\phi}_{i,j}^{(n)} + \Delta \tau \left(\vec{F} - (\vec{\phi} \cdot \vec{F}) \vec{\phi} \right)_{i,j}^{(n)}$$

1. Планарная модель Скирма: $\vec{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$

Q	E (расчёт)	Foster [1]
1	19.64	19.66
2	36.86	36.90
3	55.65	55.58
4	73.91	73.61

[1] D. Foster, Baby Skyrmion chains,
arXiv:0904.3846 [hep-th] (2009).



Плотность энергии, $Q = 1 \dots 4$

2. Трёхмерная модель Скирма: $U : S^3 \rightarrow SU(2)$

Функционал статистической энергии:

$$E = -\frac{1}{12\pi^2} \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr}(R_\mu R^\mu) + \frac{1}{16} \text{Tr}([R_\mu, R_\nu][R^\mu, R^\nu]) \right\}$$

Топологический заряд:

$$Q = -\frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \varepsilon^{ijk} \text{Tr}[R_i R_j R_k]$$

2. Трёхмерная модель Скирма: $U : S^3 \rightarrow SU(2)$

Введем рациональную функцию

$$W(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Анзац рациональных отображений

$$U(r, z) = \exp(i f(r) \hat{\mathbf{n}}_W(z) \cdot \boldsymbol{\tau}) = \cos f(r) \mathbb{I} + i \sin f(r) \hat{\mathbf{n}}_W(z) \cdot \boldsymbol{\tau}$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ единичный вектор в физическом пространстве

$$\hat{\mathbf{n}}_W = \frac{1}{1 + |W|^2} (2 \operatorname{Re} W, 2 \operatorname{Im} W, 1 - |W|^2)$$

2. Трёхмерная модель Скирма: $U : S^3 \rightarrow SU(2)$

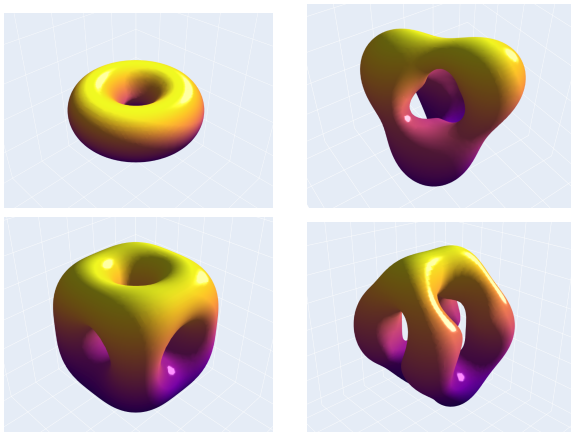
Профильная функция находится исходя из уравнения

$$(r^2 + 2Q \sin^2 f) f'' + 2r f' + Q \sin(2f) ((f')^2 - 1) - \mathcal{I} \frac{\sin^2 f \sin(2f)}{r^2} = 0$$

где

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1 + |z|^2}{1 + |W|^2} \left| \frac{dW}{dz} \right| \right)^4 \frac{2i dz d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$$
$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1 + |z|^2}{1 + |W|^2} \left| \frac{dW}{dz} \right| \right)^2 \frac{2i dz d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$$

2. Трёхмерная модель Скирма: $U : S^3 \rightarrow SU(2)$



Изоповерхности плотности энергии, $Q = 2, \dots, 5$

Три модели для планарного солитона

1. $O(3)$ сигма-модель ($\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$, $V = \frac{m^2}{2}(1 - n_3^2)$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n} - V(\vec{n})$$

2. Планарная модель Скирма:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n} - \underbrace{\frac{\kappa^2}{4} (\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n}) \cdot (\partial^\mu \vec{n} \times \partial^\nu \vec{n})}_{\text{член Скирма}} - V(\vec{n})$$

3. Доменностеночный скирмион с членом ДМ:

$$\mathcal{L}_{\text{ДМ}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n} + \underbrace{\kappa \vec{n} \cdot (\nabla_{-\alpha} \times \vec{n})}_{\text{член ДМ}} - V(\vec{n})$$

Изменение α меняет тип ДМ-члена: $\alpha = 0$ соответствует ДМ-члену блоховского типа, а $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — ДМ-члену неелевского типа.

3. Скирмионы в модели с членом Черна–Саймонса

Следующая задача:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ДМ}}[D_\mu, \vec{\phi}] + \mathcal{L}_{\text{М}}[A_\mu] + \mathcal{L}_{\text{ЧС}}[A_\mu]$$

- член ДМ фиксирует киральность и задаёт масштаб солитона;
- член Черна–Саймонса даёт калибровочному полю топологическую массу $\varkappa$ и наделяет солитон электрическим зарядом, связанным с магнитным потоком

Цель: построить решения численно и исследовать их зависимость от топологической массы $\varkappa$ и величины магнитного поля.

Спасибо за внимание!