

# Регуляризация потенциала $\frac{1}{x^2}$ в одномерной квантовой механике

Никита Михайлович Хабаров

Научный руководитель: к.ф.-м.н., с.н.с. ОТФ ИЯИ РАН

Эмин Яткярович Нугаев

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова,  
Физический факультет

10 августа 2026 г.

- 1 Мотивация
- 2 Модель для изучения
- 3 Нарушение масштабной инвариантности
- 4 Квантовомеханические свойства потенциала  $\frac{1}{x^2}$
- 5 Влияние нарушения масштабной инвариантности на энергетический спектр
- 6 Заключение

Рассмотрим нерелятивистскую модель комплексного скалярного поля с одним пространственным измерением (Yu. Galushkina, E. Kim, E. Nugaev and Ya. Shnir, 2025):

$$S = \int dt dx \left[ \frac{i}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*) - \frac{1}{2m} (\partial_x \psi \partial_x \psi^*) + \frac{\lambda}{24m^3} (\psi^* \psi)^3 \right] \quad (1)$$

Данная теория поддерживает нетопологический солитон:

$$\psi(x) = e^{i\mu t} \left( \frac{24m^3\mu}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\operatorname{sech} \sqrt{8m\mu} x} \quad (2)$$

Вычислим его энергию:

$$H = \int dx \left[ \frac{1}{2m} |\nabla \psi|^2 - \frac{\lambda}{24m^3} |\psi|^6 \right] = 0 \quad (3)$$

- Инвариантна относительно преобразований группы Галилея:
  - сдвиги пространственной координаты
  - сдвиги по времени
  - повороты (тождественное в 1+1)
  - галилеевские бусты
- Инвариантна относительно конформной группы:
  - масштабные преобразования
  - специальные конформные преобразования
- $U(1)$  -симметрия (внутренние преобразования).

(M.O. de Kok, J.W. van Holten, Nucl.Phys.B , 2007)

Дилатации:

$$\begin{cases} x' = e^{\sigma} x, \\ t' = e^{2\sigma} t, \\ \psi'(x', t') = e^{-\sigma/2} \psi(x, t) \end{cases} \quad (4)$$

СКП:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{1-\eta t}, \\ t' = \frac{t}{1-\eta t}, \\ \psi'(x', t') = \psi(x, t) e^{i \frac{m\eta x^2}{2(1-\eta t)}} (1-\eta t)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (5)$$

## Особенности нерелятивистских масштабных преобразований

Пространственная и временная координаты при дилатациях преобразуются по-разному. Поле тоже преобразуется.

Используя теорему Нетер для масштабных преобразований в теории, для плотности Нетеровского заряда и Нетеровского тока, получим:

$$D^0 = -2t\mathcal{H} \quad (6)$$

$$\frac{dD^0}{dt} + \frac{dD^1}{dx} = 0 \quad (7)$$

Проинтегрируем (6) и (7) по  $dx$ .

Для локализованных конфигураций, получим:

$$H = 0 \quad (8)$$

Рассмотрим одномерную квантовую механику с потенциалом  $\frac{1}{x^2}$ :

$$S = \int dt dx \left[ \frac{i}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*) - \frac{1}{2m} (\partial_x \psi \partial_x \psi^*) + \psi^* \frac{\alpha}{x^2} \psi \right] \quad (9)$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} i\dot{\psi} + \frac{1}{2m} \partial_x^2 \psi + \frac{\alpha}{x^2} \psi = 0, \\ i\dot{\psi}^* - \frac{1}{2m} \partial_x^2 \psi^* - \frac{\alpha}{x^2} \psi^* = 0 \end{cases} \quad (10)$$

# Нарушение масштабной инвариантности

Нарушим исходную масштабно-инвариантную теорию некоторым потенциалом  $V_{break}(x)$

$$\Delta S_{break} = -\delta \int dt dx (\psi^* V_{break}(x) \psi) \quad (11)$$

Таким образом, для теории с нарушенной масштабной инвариантностью будет выполняться 'закон несохранения':

$$\partial_t D^0 + \partial_x D^1 = -(2V_{break}(x) + x \partial_x V_{break}(x)) |\psi(x)|^2 \quad (12)$$

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (2V_{break}(x) + x V'_{break}(x)) |\psi(x)|^2 \quad (13)$$

# Связанные состояния в потенциале $\frac{1}{x^2}$

Напомним основные свойства потенциала  $V(x) = -\frac{\alpha}{x^2}$

- Если  $2m\alpha < \frac{1}{4}$ , то связанных состояний нет
- Если  $2m\alpha > \frac{1}{4}$ , то существует решение с отрицательной энергией
  - Это решение имеет вид  $\psi(x) = A\sqrt{x}K_{i\sqrt{2m\alpha - \frac{1}{4}}}(\sqrt{-2mEx})$
  - Основного состояния все равно нет. Энергетический спектр связанных состояний непрерывен.

(Andrew M. Essin; David J. Griffiths; Am. J. of Physics, 2007)

## Проблемы потенциала

Чтобы возникло основное состояние, нужно регуляризовать потенциал. При этом нарушится масштабная инвариантность.

# Нарушение масштабной инвариантности дельта-функцией

Нарушим масштабную инвариантность дельта-функцией

$V_{break}(x) = -V_0\delta(x - x_0)$  Условия сшивки волновой функции и ее производной приводят к следующему:

- При  $2m\alpha > \frac{1}{4}$  локализованных решений нет
- При  $2m\alpha < \frac{1}{4}$  появляется одно связанное состояние

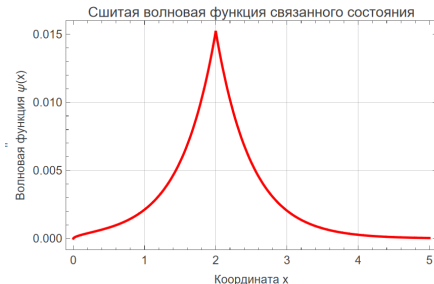


Рис.:  $\psi(x)$  в потенциале  $V(x) = -\frac{\alpha}{x^2} - V_0\delta(x - x_0)$ ,  $2m\alpha < \frac{1}{4}$

$$2H = \int dx (-2V_0\delta(x - x_0)|\psi(x)|^2 - xV_0\delta'(x - x_0)|\psi(x)|^2) \quad (14)$$

Производя элементарное интегрирование, получаем:

$$H = -\frac{1}{2}V_0|\psi(x_0)|^2 + \frac{1}{2}x_0V_0(\psi^*\partial_x\psi + \psi\partial_x\psi^*)|_{x=x_0} \quad (15)$$

Выражая производную в точке  $x_0$  как полусумму производных в окрестности этой точки, получим:

$$H = x_0V_0\psi^*(x_0)\frac{\psi'(x_0 + \epsilon) + \psi'(x_0 - \epsilon)}{2} - \frac{1}{2}V_0|\psi(x_0)|^2 \quad (16)$$

Итак, зная значение поля в точке и ее производной в окрестности, можем найти энергию всей конфигурации

# Регуляризация осциллятором

Рассмотрим регуляризацию с помощью  $V_{break}(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \beta$ ,  $x \in [-\epsilon, \epsilon]$ . Условия сшивки с потенциалом  $-\frac{\alpha}{x^2}$  позволяют выразить  $\omega, \beta$  через  $\alpha, \epsilon$ :

$$V_{break}(x) = \frac{\frac{2\alpha}{\epsilon^4} x^2}{2} - \frac{2\alpha}{\epsilon^2} \quad (17)$$

В области регуляризации волновая функция принимает следующий вид

- $$\psi_{ev}(x) = A \exp\left[-\frac{m\omega x^2}{2}\right] {}_1F_1\left(\frac{\omega - 2(E - \beta)}{4\omega}; \frac{1}{2}; m\omega x^2\right) \quad (18)$$

- $$\psi_{odd}(x) = B\sqrt{m\omega}x \exp\left[-\frac{m\omega x^2}{2}\right] {}_1F_1\left(\frac{3\omega - 2(E - \beta)}{4\omega}; \frac{3}{2}; m\omega x^2\right) \quad (19)$$

Случай  $2m\alpha > \frac{1}{4}$

Используя формулу (10), для энергии получим:

$$H = \frac{2\alpha}{\epsilon^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left( \frac{x^2}{\epsilon^2} - 1 \right) |\psi(x)|^2 dx \quad (20)$$

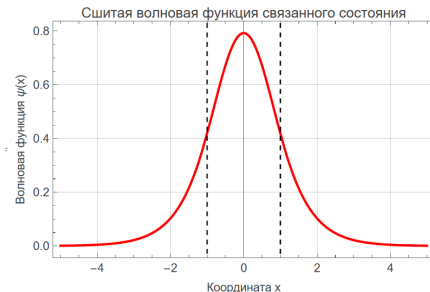


Рис.:  $\psi(x)$  в потенциале  $V(x) = -\frac{\alpha}{x^2} - V_0\delta(x - x_0)$ ,  $2m\alpha > \frac{1}{4}$

# Случай $2m\alpha < \frac{1}{4}$

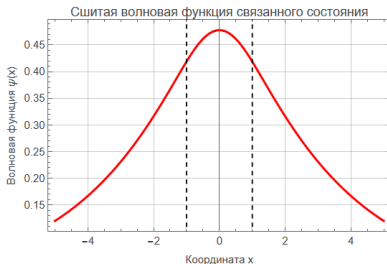


Рис.:  $\psi(x)$  в потенциале  $V(x) = -\frac{\alpha}{x^2} - V_0\delta(x - x_0)$ ,  $2m\alpha < \frac{1}{4}$

- Исходя из закона несохранения масштабной инвариантности, получена формула для определения энергии связанного состояния
- Рассмотрено влияние нарушения масштабной инвариантности потенциала  $\frac{1}{x^2}$  дельта-функцией на энергетический спектр
  - Двумя способами получена энергия возникающего при это связанного состояния
- Рассмотрено влияние регуляризации потенциала  $\frac{1}{x^2}$  осциллятором на энергетический спектр
  - Для этой регуляризации двумя способами получена энергия основного состояния при различных значениях  $\alpha$

Спасибо за внимание!