
Геодезическое отклонение и приливные силы в пространстве-времени JNW

**Текущий этап исследования статической сферически-симметричной геометрии со
скалярным полем**

Софья Климова

Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова
НИЦ «Курчатовский институт»
СПбГУ

Почему пространство-время JNW интересно?

История и исходная модель

Точное статическое сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна с минимально связанным безмассовым скалярным полем было найдено И. З. Фишером в 1948 году, переоткрыто Янисом–Ньюменом–Виникуром в 1968 году и независимо получено Вайманом в 1981 году.

В работе решение воспроизведено из действия

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\kappa} \mathcal{R} + \frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi \right].$$

Роль параметра γ

Безразмерный параметр γ характеризует влияние скалярного поля и степень отклонения геометрии JNW от решения Шварцшильда.

$$\gamma = 1, \quad q = 0$$

соответствует пределу Шварцшильда.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^\gamma dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-\gamma} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1-\gamma} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{r_g} \ln \left(1 - \frac{r_g}{r}\right).$$

Источники: Fisher (1948); Janis–Newman–Winicour, Phys. Rev. Lett. 20, 878 (1968); Wyman, Phys. Rev. D 24, 839 (1981).

Уравнение Якоби и параллельно переносимая тетрада

От координат к физическим компонентам

Уравнение Якоби:

$$\frac{D^2 \eta^\mu}{ds^2} = R^\mu{}_{\alpha\beta\sigma} u^\alpha u^\beta \eta^\sigma.$$

Чтобы получить физические приливные компоненты, вводим ортонормированную тетраду свободно падающего наблюдателя:

$$\frac{D\lambda^\mu{}_{(a)}}{ds} = 0, \quad g_{\mu\nu} \lambda^\mu{}_{(a)} \lambda^\nu{}_{(b)} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Два направления фиксируются естественно:

$$\lambda^\mu{}_{(0)} = u^\mu, \quad \lambda^\mu{}_{(2)} = (0, 0, R^{-1}, 0).$$

Ортонормированная пара

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_{(1)} &= \left(\frac{\sqrt{B} R \dot{R}}{\sqrt{A} \sqrt{R^2 + L^2}}, \frac{ER}{\sqrt{AB} \sqrt{R^2 + L^2}}, 0, 0 \right), \\ \Lambda^\mu{}_{(3)} &= \left(\frac{EL}{A \sqrt{R^2 + L^2}}, \frac{L \dot{R}}{\sqrt{R^2 + L^2}}, 0, \frac{\sqrt{R^2 + L^2}}{R^2} \right). \end{aligned}$$

Поворот построенных выше векторов

$$\lambda^\mu{}_{(1)} = \Lambda^\mu{}_{(1)} \cos \Omega - \Lambda^\mu{}_{(3)} \sin \Omega,$$

$$\lambda^\mu{}_{(3)} = \Lambda^\mu{}_{(1)} \sin \Omega + \Lambda^\mu{}_{(3)} \cos \Omega.$$

Текущий результат: приливный оператор

Уравнение Якоби в тетрадных компонентах

Разлагая поле Якоби по параллельно переносимой тетраде,

$$\eta^\mu = \eta^{(a)} \lambda^\mu_{(a)},$$

получаем

$$\ddot{\eta}^{(a)} = K^{(a)}_{(b)} \eta^{(b)}, \quad K^{(a)}_{(b)} = \lambda^{(a)}_\mu R^\mu_{\alpha\beta\sigma} u^\alpha u^\beta \lambda^\sigma_{(b)}.$$

Общая структура

В нерадиальном случае пространственная часть приливного оператора имеет симметричный блочный вид:

$$K_{\text{sp}} = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & 0 \\ K_{13} & 0 & K_{33} \end{pmatrix}.$$

Направление $\lambda_{(2)}$ отделяется, а смешивание возникает только в плоскости $(1, 3)$.

Радиальное движение

Для радиального движения $L = 0$ можно выбрать постоянную фазу $\Omega = 0$.

Тогда результат символьного вычисления диагонален:

$$K_{\text{sp}} = \text{diag} (k_r, k_\perp, k_\perp).$$

Решение в квадратурах и следующий этап

Для каждого вектора Киллинга ξ_A^μ первый интеграл уравнения Якоби в параллельно переносимой тетраде имеет вид

$$\sum_{a=1}^3 \left(\xi_{A(a)} \dot{\eta}^{(a)} - \dot{\xi}_{A(a)} \eta^{(a)} \right) = C_A.$$

Два вращательных вектора Киллинга дают явное решение для компоненты, перпендикулярной плоскости движения:

$$\eta^{(2)}(R) = \frac{R}{L} [C_1 \cos \varphi(R) + C_2 \sin \varphi(R)], \quad L \neq 0.$$

Для компонент в плоскости орбиты используется представление

$$\eta^{(1)} = U \xi_{3(1)} + V \xi_{0(1)},$$

$$\eta^{(3)} = U \xi_{3(3)} + V \xi_{0(3)}.$$

Введём обозначения

$$Q = R^2 + L^2, \quad \Delta_R = A(R)B(R)R^2\dot{R}^2.$$

Тогда получены квадратуры:

$$U(s) = U_0 + C_3 \int \frac{\Delta_R + E^2 L^2}{\Delta_R Q} ds + C_0 E L \int \frac{ds}{\Delta_R},$$
$$V(s) = V_0 + C_0 \int \frac{Q}{\Delta_R} ds + C_3 E L \int \frac{ds}{\Delta_R}.$$

Следующий этап

Подставить функции JNW после перехода $r \mapsto R(r)$ получить квадратуры именно для JNW и исследовать зависимость решений от γ, E, L , а также предел $\gamma \rightarrow 1$.

Конвенции кривизны и полный вид решения JNW

Конвенция тензора Римана и уравнение Якоби

Используется сигнатура

$$(+ - - -)$$

и конвенция тензора Римана

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}.$$

Таким образом,

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\rho} = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}V^{\sigma}.$$

При этих соглашениях уравнение Якоби имеет вид

$$\frac{D^2\eta^{\mu}}{ds^2} = R^{\mu}{}_{\alpha\beta\sigma}u^{\alpha}u^{\beta}\eta^{\sigma},$$

Полевые уравнения и решение JNW

В выбранной нормировке действие имеет вид

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\kappa} \mathcal{R} + \frac{1}{2} \nabla_{\mu} \Phi \nabla^{\mu} \Phi \right].$$

Уравнения поля:

$$\frac{1}{\kappa} \left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2} \nabla_{\mu} \Phi \nabla_{\nu} \Phi = 0,$$
$$\square \Phi = 0.$$

Для сферически-симметричного анзаца

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)d\Omega_2^2, \quad \Phi = \Phi(r),$$

где

$$d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

Литература



I. Z. Fisher,

Scalar mesostatic field with regard for gravitational effects,

Zh. Eksp. Teor. Fiz. **18**, 636–640 (1948); English translation: arXiv:gr-qc/9911008.



A. I. Janis, E. T. Newman, J. Winicour,

Reality of the Schwarzschild Singularity,

Phys. Rev. Lett. **20**, 878–880 (1968), DOI: 10.1103/PhysRevLett.20.878.



M. Wyman,

Static spherically symmetric scalar fields in general relativity,

Phys. Rev. D **24**, 839–841 (1981), DOI: 10.1103/PhysRevD.24.839.



H. Fuchs,

Solutions of the Equations of Geodesic Deviation for Static Spherical Symmetric Space-times,

Ann. Phys. (Leipzig) **40**, 231–233 (1983), DOI: 10.1002/andp.19834950408.



A. Sadhu, V. Suneeta,

A naked singularity stable under scalar field perturbations,

Class. Quantum Grav. **30**, 115011 (2013), arXiv:1208.5838.



G. Gylchev et al.,

Image of the Janis–Newman–Winicour naked singularity with a thin accretion disk,

Phys. Rev. D **100**, 024055 (2019).