

Энергия Казимира для системы из n параллельных δ -пластин в теории безмассового скалярного поля

М. В. Красков

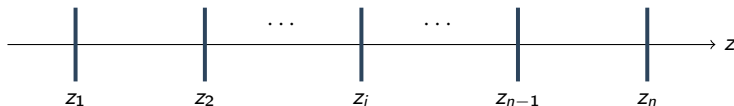
Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет

2026

Система из n δ -пластин

Рассматривается безмассовое вещественное скалярное поле в присутствии n параллельных частично прозрачных пластин:

$$V(z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta(z - z_i), \quad z_1 < z_2 < \dots < z_n.$$



Евклидово действие:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \left[(\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi) + V(z)\phi^2 \right].$$

После преобразования Фурье по координатам вдоль пластин

$$\mathbf{q} = (\zeta, p_x, p_y), \quad q = |\mathbf{q}|,$$

свободная функция Грина принимает вид

$$G_0(z, z'; q) = \frac{e^{-q|z-z'|}}{2q}.$$

Цель — получить энергию взаимодействия для произвольного числа пластин.

Функциональный определитель

После интегрирования по частям действие можно записать в виде

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \phi K_{\Phi} \phi, \quad K_{\Phi} = K_0 + V, \quad K_0 = -\partial_{\mu} \partial_{\mu}.$$

Поскольку функциональный интеграл является гауссовым,

$$Z \propto (\det K_{\Phi})^{-1/2}, \quad Z_0 \propto (\det K_0)^{-1/2},$$

и, следовательно,

$$\frac{Z}{Z_0} = \det^{-1/2} (1 + K_0^{-1} V).$$

Вакуумная энергия определяется из поведения Z/Z_0 при большом евклидовом времени. После перехода к смешанному представлению получаем

$$\boxed{\frac{E}{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \text{tr}_z \ln (1 + G_0(q) V)}.$$

Таким образом, исходная задача сводится к вычислению функционального определителя одномерного оператора по координате z .

Редукция к конечномерному определителю

Взаимодействие сосредоточено только в конечном числе точек z_i . Введём оператор

$$(Bf)_i = f(z_i), \quad (B^T c)(z) = \sum_{i=1}^n c_i \delta(z - z_i),$$

и матрицу констант взаимодействия $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Тогда

$$V = B^T \Lambda B.$$

Используя тождество Сильвестра получаем

$$\boxed{\det_z \left(1 + G_0 B^T \Lambda B \right) = \det_n \left(1 + \Lambda M(q) \right)},$$

где

$$M(q) = B G_0(q) B^T, \quad M_{ij}(q) = \frac{e^{-q|z_i - z_j|}}{2q}.$$

Энергия взаимодействия пластин

После вычитания собственных энергий отдельных пластин

$$\Delta_n(q) = \det(1 + R(q)E(q)),$$

$$R = \text{diag}(r_1, \dots, r_n), \quad r_i = \frac{\lambda_i}{2q + \lambda_i},$$

$$E_{ij} = \begin{cases} e^{-q|z_i - z_j|}, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$$

а энергия взаимодействия равна

$$\frac{E_{\text{int}}}{\mathcal{A}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty q^2 \ln \Delta_n(q) dq.$$

От дискретного стека к слою конечной толщины

Для одинаковых равноотстоящих пластин

$$\lambda_i = \lambda, \quad z_j = (j-1)L, \quad \rho = e^{-qL},$$

матрица

$$C_{ij} = \rho^{|i-j|}$$

имеет трёхдиагональную обратную матрицу. Поэтому $\Delta_n(q)$ можно вычислить рекуррентно; для однородного стека результат выражается через многочлены Чебышёва второго рода.

Теперь рассмотрим предел

$$n \rightarrow \infty, \quad L \rightarrow 0, \quad nL = T, \quad \lambda = \kappa L.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^n \lambda \delta(z - (j-1)L) \longrightarrow \kappa, \quad 0 < z < T,$$

то есть система δ -пластин превращается в сплошной слой толщины T .

Для определителя получается

$$\Delta_{\text{slab}}(q) = e^{-T\left(q + \frac{\kappa}{2q}\right)} \left[\cosh(Ts) + \frac{q + \frac{\kappa}{2q}}{s} \sinh(Ts) \right], \quad s = \sqrt{q^2 + \kappa}.$$

Итог

- Рассмотрена система из произвольного числа частично прозрачных δ -пластин в теории безмассового скалярного поля.
- Благодаря конечному рангу взаимодействия функциональный определитель сводится к определителю матрицы $n \times n$:

$$\det_z(1 + G_0 V) = \det_n(1 + \Lambda M).$$

- После вычитания собственных энергий вся зависимость от взаимного расположения пластин содержится в элементах

$$e^{-q|z_i - z_j|}.$$

- Для произвольных положений задача сводится к трёхдиагональному определителю, а для одинаковых равноотстоящих пластин результат выражается через многочлены Чебышёва второго рода.
- В пределе большого числа слабых пластин система переходит в сплошной слой конечной толщины.