

Возможные типы сгущения тёмной материи в embedding gravity

S.A. Paston, A.J. Ziyatdinov,

SPbU, PNPI

07.08.2026

Теория вложения

Индукцированная метрика:

$$(\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y^b)\eta_{ab} = g_{\mu\nu}, \quad (1)$$

где η_{ab} — метрика объемлющего пространства Минковского размерности 9+1, а $g_{\mu\nu}$ — метрика поверхности размерности 3+1. y^a — параметрически заданная функция вложения.

Рассмотрим действие Эйнштейна–Гильберта:

$$S^{EH} = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m. \quad (2)$$

Уравнения движения (Т. Regge, С. Teitelboim, Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting (Trieste, Italy, 1975), ed. R. Ruffini, North-Holland, Amsterdam, 1977, 77–88, arXiv:1612.05256):

$$D_\mu ((G^{\mu\nu} - \kappa T^{\mu\nu})\partial_\nu y^a) = 0, \quad (3)$$

или, в более удобной форме:

$$(G^{\mu\nu} - \kappa T^{\mu\nu})b_{\mu\nu}^a = 0 \Rightarrow \begin{cases} G^{\mu\nu} = \kappa(T^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}) \\ \tau^{\mu\nu} b_{\mu\nu}^a = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

где $b_{\mu\nu}^a = D_\mu \partial_\nu y^a$ — коэффициенты второй фундаментальной формы поверхности.

Теория вложения

Рассмотрим следующее действие:

$$S = -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} ((\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y^b) \eta_{ab} - g_{\mu\nu}) \tau^{\mu\nu} + S_m, \quad (5)$$

где $g_{\mu\nu}$, y^a и $\tau^{\mu\nu}$ являются независимыми переменными (S.A. Paston, Phys. Rev. D, 96:8 (2017), 084059, 8 pp., arXiv:1708.03944.). Тогда уравнения движения имеют вид:

$$G^{\mu\nu} = \kappa(T^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}), \quad (6)$$

$$\tau^{\mu\nu} b_{\mu\nu}^a = 0, \quad (7)$$

$$g_{\mu\nu} = (\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y^b) \eta_{ab}, \quad (8)$$

Уравнения движения совпадают с уравнениями теории вложения! Что, если этот дополнительный вклад описывает темную материю?

Линейный режим FMEG

Пылевидная материя:

$$\tau^{\mu\nu} \approx \rho_\tau \delta_0^\mu \delta_0^\nu, \quad \tau^{i0} \text{ и } \tau^{ik} \ll \tau^{00}, \quad \rho_\tau > 0. \quad (9)$$

Мы рассматриваем предел слабого гравитационного поля, поэтому:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} \ll 1. \quad (10)$$

Это соответствует малой деформации плоской функции вложения, то есть:

$$y^a = \bar{y}^a + q^a, \quad q^a \ll \bar{y}^a. \quad (11)$$

Воспользуемся формулой (8), тогда (S. A. Paston, “Weak field limit for embedding gravity”, Theoretical and Mathematical Physics, 216:3 (2023), 1382–1395, arXiv:2311.02515.):

$$h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - 2q_a \bar{b}_{\mu\nu}^a, \quad \xi_\mu = q_a (\partial_\mu y^a). \quad (12)$$

Линейный режим FMEG

Рассмотрим малую область пространства-времени:

$$b_{\mu\nu}^a \approx \bar{b}_{\mu\nu}^a = \delta_A^a B_{\mu\nu}^a, \quad B_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \partial_\nu \bar{y}^a(0), \quad B_{\mu\nu}^A \lesssim \frac{1}{L} \quad (13)$$

При этих предположениях уравнение (8) можно переписать в виде:

$$B_{\mu\nu}^A \tau^{\mu\nu} = 0. \quad (14)$$

Определим α_A^{ik} :

$$\alpha_A^{ik} B_{ik}^C = \delta_A^C, \quad \alpha_A^{ik} = \alpha_A^{ki}, \quad (15)$$

тогда:

$$\tau^{ik} = -\alpha_A^{ik} (\tau^{00} B_{00}^A + 2\tau^{0j} B_{0j}^A). \quad (16)$$

Нас будут интересовать статические решения в этих предположениях. Это дает возможность найти связь между τ^{ik} и τ^{00} :

$$\tau^{ik} = w^{ik} \tau^{00}, \quad w^{ik} = -B_{00}^A \alpha_A^{ik}, \quad w^{ik} \ll 1 \Rightarrow B_{00}^A \ll \frac{1}{L}. \quad (17)$$

Линейный режим FMEG

Следствием уравнения (6) является:

$$D_\mu \tau^{\mu\nu} = 0. \quad (18)$$

В главном приближении из (6) и (18) получаем:

$$\partial_i \partial_i \varphi = 4\pi G \rho_\tau. \quad (19)$$

$$\rho_\tau \partial_i \varphi + w_{ik} \partial_k \rho_\tau = 0. \quad (20)$$

Матрица w^{ik} симметрична, следовательно, ее можно диагонализировать. Пусть w_1, w_2, w_3 — ее собственные значения. Диагонализуем матрицу w^{ik} и выполним замену переменной $z = \ln \frac{\rho_\tau}{\bar{\rho}}$.

Тогда уравнения (20) принимают вид:

$$(w_1 - w_2) \partial_1 \partial_2 \varphi = 0, \quad (w_1 - w_3) \partial_1 \partial_3 \varphi = 0, \quad (w_2 - w_3) \partial_2 \partial_3 \varphi = 0, \quad (21)$$

$$(w_1 - w_2) \partial_1 \partial_2 z = 0, \quad (w_1 - w_3) \partial_1 \partial_3 z = 0, \quad (w_2 - w_3) \partial_2 \partial_3 z = 0. \quad (22)$$

Эти уравнения необходимо решать совместно с линеаризованными уравнениями Эйнштейна (19).

Решение типа «стенка»

Для первого типа решений, когда $w_1 \neq w_2 \neq w_3$, положим $w_1 = w$. Тогда из уравнений (19) и (20) получаем:

$$\varphi''(x^1) = 4\pi G \rho_\tau, \quad (23)$$

$$\varphi = -w \ln \frac{\rho_\tau}{\tilde{\rho}}. \quad (24)$$

Решением этих уравнений является:

$$\varphi = \varphi_0 + 2w \ln \left(\cosh \frac{x^1 - x_0^1}{\delta} \right), \quad \rho_\tau = \frac{\rho_0}{\cosh^2 \frac{x^1 - x_0^1}{\delta}}, \quad (25)$$

где δ и φ_0 — постоянные интегрирования, а ρ_0 — плотность в центре, определяемая выражением:

$$\rho_0 = \frac{w}{2\pi G \delta^2} \quad (26)$$

Решение типа «струна»

Второй тип решений возникает при $w_1 = w_2 = w$, $w_3 \neq w$. Тогда из уравнений (19) и (20) получаем:

$$\Delta\varphi(x^1, x^2) = 4\pi G\rho_\tau, \quad (27)$$

$$\varphi = -w \ln \frac{\rho_\tau}{\tilde{\rho}}. \quad (28)$$

где $\Delta = \partial_{x^1}^2 + \partial_{x^2}^2$. Будем искать радиально-симметричное решение. Тогда решение этих уравнений имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + 2w \ln \left(1 + \frac{r^2}{\delta^2} \right), \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}_0}{\left(1 + \frac{r^2}{\delta^2} \right)^2}, \quad (29)$$

где δ — толщина стенки, а ρ_0 — плотность в центре, определяемая формулой:

$$\rho_0 = \frac{2w}{\pi G\delta^2}. \quad (30)$$

Решение типа «сфера»

Третий тип решений возникает при $w_1 = w_2 = w_3 = w$. Тогда из уравнений (19) и (20) получаем:

$$\partial_i \partial_i \varphi(x^1, x^2, x^3) = 4\pi G \rho_\tau, \quad i = 1, 2, 3, \quad (31)$$

$$\varphi = -w \ln \frac{\rho_\tau}{\tilde{\rho}}. \quad (32)$$

Будем искать сферически симметричное решение. Тогда уравнение можно переписать в виде:

$$\varphi''(r) + \frac{2}{r} \varphi'(r) = C_2 e^{-\frac{\varphi}{w}}. \quad (33)$$

Это уравнение не имеет решения в элементарных функциях. Поэтому мы будем искать его численно. Потребуем, чтобы решение удовлетворяло условиям:

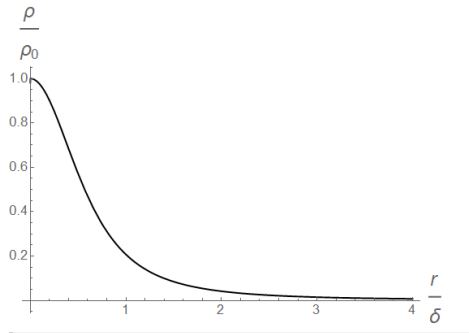
$$r^2 \varphi'(r) \longrightarrow 0 \quad r \longrightarrow 0, \quad (34)$$

$$\varphi(0) = 0. \quad (35)$$

Полученные решения можно записать через специальные функции $\hat{\varphi}$:

$$\varphi = \varphi_0 - w \hat{\varphi} \left(\frac{4r}{\delta} \right), \quad \rho_\tau = \rho_0 \exp \left(\hat{\varphi} \left(\frac{4r}{\delta} \right) \right), \quad \rho_0 = \frac{4w}{\pi G \delta^2}. \quad (36)$$

Решение типа «сфера»



$$\rho \sim \frac{1}{r^2}, \quad r \longrightarrow \infty$$

(S.A. Paston and A.J. Ziyatdinov. «Возможные типы конденсации темной материи в теории вложения». Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2026(01):026, January 2026. arXiv:2509.00980)