Новые дуальные формулировки полей различных спинов

Виктория Александровна Абакумова

abakumova@phys.tsu.ru

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Аннотация

Рассматривается систематическая процедура построения нового типа дуальных формулировок с высшими производными в терминах потенциалов исходных полей для свободных теорий поля, инволютивное замыкание которых содержит топологическую подсистему. Предлагается систематическая процедура построения действия Штюкельберга, которое позволяет переключаться между дуальными формулировками наложением соответствующих калибровочных условий, исключающих из уравнений движения либо поля, либо их потенциалы.

Общая процедура

Рассмотрим лагранжевы уравнения движения

$$E_i \equiv \widehat{M}_{ij}\phi^j = 0\,, \;\; \widehat{M}_{ij}(\partial) = \widehat{M}_{ji}(-\partial) \equiv \widehat{M}^{\dagger}_{ji}(\partial)\,, \tag{1}$$

инволютивное замыкание (пополнение исходной системы всеми её возможными следствиями более низких порядков) которых содержит *топологическую* подсистему (не имеющую физических степеней свободы),

$$\tau_a \equiv \widehat{\Gamma}^{\dagger}{}_a{}^i E_i \approx 0\,, \tag{2}$$

обладающую в общем случае приводимой калибровочной симметрией

$$\delta\phi^i = \widehat{\rho}^i{}_A\omega^A\,, \tag{3}$$

$$\delta\omega^A = \widehat{\rho}^A{}_{A_1}\zeta_1^{A_1}\,, \;\; \text{и т. д.} \tag{4}$$

Подставляя общее решение топологической подсистемы, представляющее собой чистую калибровку, в уравнения инволютивного замыкания, получаем эквивалентную теорию,

$$\overline{E}_i \equiv \widehat{M}_{ij}\widehat{\rho}^j{}_A\omega^A = 0\,, \tag{5}$$

для которой роль полей играют калибровочные параметры топологической подсистемы, рассматриваемые как потенциалы для исходных полей. Таким образом, теория, переформулированная в терминах потенциалов, дуальна исходной лагранжевой теории.
Генераторы калибровочной симметрии $\widehat{\rho}^i{}_A$ определяют нетривиальные следствия более высоких порядков

$$\mathcal{T}_A \equiv \widehat{\rho}^{\dagger}_A{}^i E_i \approx 0\,, \tag{6}$$

которые в общем случае приводимы, $\widehat{\rho}^{\dagger}_{A_1}{}^A\mathcal{T}_A = 0$, и т. д.
Инволютивное замыкание

$$E_i = 0\,, \;\; \tau_a = 0\,, \;\; \mathcal{T}_A = 0\,, \tag{7}$$

может быть возвращено в лагранжеву форму включением полей Штюкельберга σ^a, ω^A.

Действие Штюкельберга:

$$S_{St} = \frac{1}{2}\int dx(\phi^i + \widehat{\Gamma}^i{}_a\sigma^a + \widehat{\rho}^i{}_A\omega^A)\widehat{M}_{ij}(\phi^j + \widehat{\Gamma}^j{}_b\sigma^b + \widehat{\rho}^j{}_B\omega^B)\,. \tag{8}$$

Приводимые калибровочные преобразования:

$$\begin{gathered}
\delta\phi^i = -\widehat{\Gamma}^i{}_a\mathcal{E}^a - \widehat{\rho}^i{}_A\omega^A\,, \;\; \delta\sigma^a = \mathcal{E}^a\,, \;\; \delta\omega^A = \mathcal{E}^A - \widehat{\rho}^A{}_{A_1}\xi^{A_1}\,;\\
\delta\mathcal{E}^A = \widehat{\rho}^A{}_{A_1}\mathcal{E}^{A_1}\,, \;\; \delta\mathcal{E}^a = 0\,, \;\; \delta\xi^{A_1} = \mathcal{E}^{A_1} - \widehat{\rho}^{A_1}{}_{A_2}\xi^2\,;\\
\delta\mathcal{E}^{A_{k-1}} = \widehat{\rho}^{A_{k-1}}{}_{A_k}\mathcal{E}^{A_k}\,, \;\; \delta\xi^{A_k} = \mathcal{E}^{A_k} - \rho^{A_k}{}_{A_{k+1}}\xi^{A_{k+1}}\,;\\
\delta\mathcal{E}^{A_{n-1}} = \widehat{\rho}^{A_{n-1}}{}_{A_n}\mathcal{E}^{A_n}\,, \;\; \delta\xi^n = \mathcal{E}^{A_n}\,.
\end{gathered} \tag{9}$$

Допустимые калибровки:

- $\sigma^a = 0\,, \;\; \omega^A = 0 \; : \;\; E_i = 0\,;$
- $\phi^i = 0\,, \;\; \sigma^a = 0\,, \;\; \widehat{\rho}^{\dagger A_1}{}_A\omega^A = 0 \; : \;\; \overline{E}_i = 0\,.$

Корректность предложенных дуальных формулирок проверяется подсчётом числа степеней свободы по формуле [`D. S. Kaparulin, S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, JHEP (2013), arXiv:1210.6821`]:

$$\mathcal{N}_{\text{DoF}} = \frac{1}{2}\sum_n n\big(t_n - \sum_m(-1)^m(l_n^m + r_n^m)\big)\,, \tag{10}$$

где t_n – число уравнений порядка n, l_n^m и r_n^m – число калибровочных тождеств и калибровочных симметрий полного порядка n и порядка приводимости m, соответственно.

Примеры

Топологическая подсистема линеаризованных уравнений Эйнштейна в 4-мерном пространстве Минковского,

$$\begin{gathered}
E_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu}(\Box h - \partial_\lambda\partial_\rho h^{\lambda\rho}) - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h\\
+ \partial^\lambda(\partial_\nu h_{\mu\lambda} + \partial_\mu h_{\nu\lambda})) = 0\,, \;\; h = \eta_{\mu\nu}h^{\mu\nu}\,,
\end{gathered} \tag{11}$$

представляет собой линеаризованное уравнение Нордстрёма,

$$\tau \equiv \Box h - \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} = 0\,, \tag{12}$$

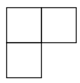
инвариантное относительно калибровочных преобразований

$$\delta h^{\mu\nu} = \partial_\lambda\omega^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{3}\eta_{\alpha\beta}\big(\eta^{\mu\nu}\partial_\lambda\omega^{\alpha\beta\lambda} + \partial^\nu\omega^{\alpha\beta\mu} + \partial^\mu\omega^{\alpha\beta\nu}\big)\,; \tag{13}$$

$$\delta\omega^{\mu\nu\lambda} = \partial_\rho\big(\zeta_1^{\mu\nu\lambda\rho} - \frac{1}{9}\eta_{\alpha\beta}(2\eta^{\mu\nu}\zeta_1^{\alpha\beta\lambda\rho} - \eta^{\nu\lambda}\zeta_1{}^{\alpha\beta\mu\rho}\eta^{\lambda\mu}\zeta_1^{\alpha\beta\nu\rho})\big)\,; \tag{14}$$

$$\delta\zeta_1^{\mu\nu\lambda\rho} = \partial_\sigma\zeta_2^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\,, \tag{15}$$

параметры которых представляют собой тензоры с симметрией, описываемой диаграммой Юнга типа «крюк»,



$: \;\; \omega^{(\mu\nu)\lambda} = \omega^{\mu\nu\lambda}\,, \;\; \omega^{(\mu\nu\lambda)} = 0\,,$ и т. д.

Соответствующие дуальные уравнения

$$\begin{gathered}
\widetilde{E}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\partial^\lambda\big(\partial_\mu\partial^\rho\omega_{\nu\lambda\rho} + \partial_\nu\partial^\rho\omega_{\mu\lambda\rho} - \Box\omega_{\mu\nu\lambda}\big)\\
+ \eta_{\alpha\beta}(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\partial_\lambda\omega^{\alpha\beta\lambda} = 0\,.
\end{gathered} \tag{16}$$

инвариантны относительно преобразований (14)–(15).
Согласно (10), где $t_3 = 9$, $l_4^0 = 4$, $r_1^0 = 15$, $r_2^1 = 4$,

$$\mathcal{N}_{\text{DoF}} = \frac{1}{2}\big(3\cdot 9 - 4\cdot 4 - 1\cdot 15 + 2\cdot 4\big) = 2\,,$$

что даёт корректное число степеней свободы для безмассового спина 2.

Теория массивного спина 1 в 4-мерном пространстве Минковского:

$$E_\mu \equiv (\Box + m^2)A_\mu - \partial_\mu\partial_\nu A^\nu = 0\,. \tag{17}$$

Дуальная формулировка:

$$\overline{E}_\mu \equiv (\Box + m^2)\partial^\nu\omega_{\mu\nu} = 0\,, \quad \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}\,. \tag{18}$$

Теория массивного спина 2 в 4-мерном пространстве Минковского:

$$\begin{gathered}
E_{\mu\nu} \equiv (\Box + m^2)(\eta_{\mu\nu}h - h_{\mu\nu}) - \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\rho h^{\lambda\rho}\\
+ \partial_\mu\partial^\lambda h_{\nu\lambda} + \partial_\nu\partial^\lambda h_{\mu\lambda} = 0\,, \;\; h = \eta_{\mu\nu}h^{\mu\nu}\,.
\end{gathered} \tag{19}$$

Дуальная формулировка:

$$\overline{E}_{\mu\nu} \equiv (\Box + m^2)\partial^\lambda\partial^\rho\widetilde{\omega}_{\mu\nu\lambda\rho} = 0\,, \tag{20}$$

где $\eta^{\mu\nu}\widetilde{\omega}_{\mu\nu\lambda\rho} = 0$, $\widetilde{\omega}^{(\mu\nu)\lambda\rho} = \widetilde{\omega}^{\mu\nu\lambda\rho}$, $\widetilde{\omega}^{\mu\nu(\lambda\rho)} = \widetilde{\omega}^{\mu\nu\lambda\rho}$, $\widetilde{\omega}^{(\mu\nu\lambda)\rho} = 0$.

Перечень публикаций:

- V. A. Abakumova, S. L. Lyakhovich // Ann. Phys. (2023) Vol. 453, 169322.
- V. A. Abakumova, D. Frolovsky, H.-C. Herbig, S. L. Lyakhovich // Eur. Phys. J. C. (2022) Vol. 82(9), 780.
- V. A. Abakumova, S. L. Lyakhovich // Phys. Lett. B. (2021) Vol. 820, 136552.