Функциональный интеграл в квадратичной гравитации и символьные вычисления

Всеволод Чистяков
Научный руководитель: д.ф.-м. н. профессор Белокуров В. В.
МГУ имени М. В. Ломоносова Физический факультет

30 июля 2023 г.

Модель

Метрика FLRW

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 = (g'(\tau))^2(d\tau^2 - dx^2) \qquad t = g(\tau)$$

Квадратичная гравитация:

$$A = A_0 + A_1 + A_2$$

$$A_0 = \Lambda \int d\tau\, (g'(\tau))^4 \sim \Lambda \int \sqrt{-\mathcal{G}} d^4x$$

$$A_1 = -\kappa \int d\tau \left[(g''(\tau))^2 - \frac{d}{d\tau}(g'(\tau)g''(\tau)) \right] \sim -\kappa \int R\sqrt{-\mathcal{G}} d^4x$$

$$A_2 = \frac{\lambda^2}{2} \int d\tau \left(\frac{g'''(\tau)}{g'(\tau)} \right)^2 \sim -\lambda^2 \int R^2 \sqrt{-\mathcal{G}} d^4x$$

Мера Винера:

$$\mu(dg) = e^{-A_2(g)}dg = e^{-\int_0^\tau (p'(\tau_1))^2 d\tau_1} dg = w_{1/\lambda}(dp)$$

$$\int p(\tau) w_{1/\lambda}(dp) = 0 \qquad \int p(\tau_1)p(\tau_2) w_{1/\lambda}(dp) = \frac{1}{\lambda^2}\min(\tau_1, \tau_2)$$

Замена:

$$\eta' = -(p\eta - 1)^2$$

$$g(\tau) = -\sigma \int_0^\tau d\bar{\tau}\, \eta(\bar{\tau}) \exp\left(\int_0^{\bar{\tau}} d\tau_1 p(\tau_1)\, [1 - p(\tau_1)\eta(\tau_1)] \right)$$

Средний масштабный фактор:

$$r(\tau) = \int_0^\tau (g''(\tau_1))^2 d\tau_1 - g'(\tau)g''(\tau)$$

$$< a(t) >= \frac{1}{Z} \int g'(\tau(t)) e^{\kappa r(\tau(t))} w_{\frac{1}{\lambda}}(dp)$$

$$< a(t) >= \sum_n \frac{\bar{a}_{2n}(t)}{\lambda^{2n}}$$

Теория возмущений

$$p(\tau) \to \alpha p(\tau)$$

$$f[\alpha p] = \sum_n f_n[p]\alpha^n$$

$$I_w(f) = \left(\int f[p] w_{\frac{1}{\lambda}}(dp) \right)|_{\lambda=1}$$

$$\int f[p] w_{\frac{1}{\lambda}}(dp) = I_w(f[\alpha p])|_{\alpha=1/\lambda}$$

После введения параметра α введённые ранее функции $g(\tau)$ $\tau(t)$ $r(\tau)$ становятся функциями также и параметра α. $\tau(t, \alpha)$ определяется соотношением $g(\tau(t,\alpha),\alpha) = t$. Каждая из этих величин будет раскладываться в ряд:

$$g(\tau, \alpha) = \sum_k g_k(\tau)\alpha^k \qquad \tau(t, \alpha) = \sum_k \tau_{(k)}(t)\alpha^k$$

$$a(t, \alpha) = g'(\tau(t, \alpha), \alpha) \qquad \rho(t, \alpha) = r(\tau(t, \alpha), \alpha) \qquad E(t, \alpha) = e^{\kappa\rho(t,\alpha)}$$

$$a(t, \alpha) = \sum_k a_k(t)\alpha^k \qquad E(t, \alpha) = \sum_k E_k(t)\alpha^k$$

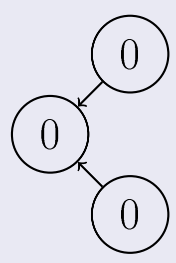
$$< a(t) >= \frac{I_w\,(a(t,\alpha)E(t,\alpha))}{I_w\,(E(t,\alpha))}|_{\alpha=1/\lambda}$$

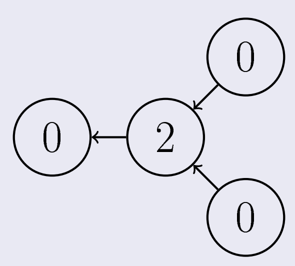
$$\bar{a}_2 = I_w(a_1E_1) + I_w(a_2)$$

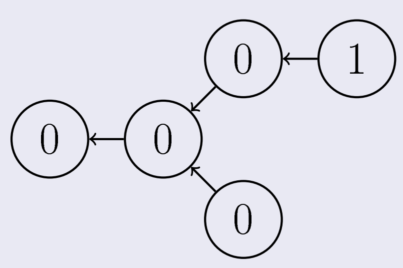
$$\beta = \sqrt{\frac{2t}{\sigma}}$$

$$a_2 = \beta \int_0^\beta d\tau_1 p(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 p(\tau_2) + \ldots \quad (17 \text{ слагаемых})$$

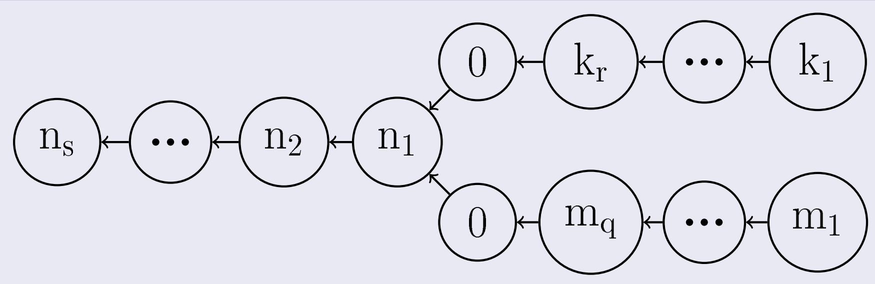
Сопоставление дерева функционалу

$p^2(\tau) \backsimeq$ 

$\int_0^\tau d\tau_1 \tau_1^2 p^2(\tau_1) \backsimeq$ 

$\int_0^\tau d\tau_1 p(\tau_1) \left(\int_0^{\tau_1} d\tau_2 \tau_2 p(\tau_2)\right) \backsimeq$ 

Алгоритм вычисления $I_w(f)$



$$I_w(f) = b(k_r, \ldots, k_1|m_q, \ldots, m_1) \left(\prod_{j=1}^{s-1} \frac{1}{S' + j + \sum_{l=1}^{j} n_l} \right) \beta^{\sum_{l=1}^{s} n_l + s + S' - 1}$$

$$S' = \sum_{l=1}^{r} k_l + \sum_{l=1}^{q} m_l + r + q + 1$$

$$b(k_r, \ldots, k_1|m_q, \ldots, m_1) = \frac{b(k_{r-1}, \ldots, k_1|m_q, \ldots, m_1) + b(k_r, \ldots, k_1|m_{q-1}, \ldots, m_1)}{\sum_{l=1}^{r} k_l + \sum_{l=1}^{q} m_l + r + q + 1}$$

$$b(\,|\,) = 1$$

Результаты

$$\bar{a}_2 = -\frac{139}{72}\beta^5\kappa\sigma^3 + \frac{18}{35}\beta^4\sigma$$

$$\bar{a}_4 = \left(\frac{83}{30}\right)^2 \beta^{11}\kappa^4\sigma^9 + \ldots$$

Дальнейшие исследования

- Вычислить функциональный интеграл численно, применяя методы машинного обучения
- Применить изложенный подход к другим космологическим моделям, в частности, к модели инфляции

Публикации

V. V. Belokurov and E. T. Shavgulidze "Path Integrals in Quadratic Gravity"JHEP 02 (2022) 112 , [arXiv:2110.06041]