Признаки дополнительных измерений в гравитационных волнах

М.Ю. Хлопунов[1,2] и Д.В. Гальцов[1]

[1]Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

[2]Институт Теоретической и Математической Физики, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: khlopunov.mi14@physics.msu.ru, galtsov@physics.msu.ru

Аннотация

Нечетное число дополнительных измерений пространства-времени может проявиться в гравитационных волнах за счет нарушения принципа Гюйгенса в нечетных размерностях. Мы изучаем соответствующие эффекты в излучении в модели скалярного поля в размерности три. Также мы изучаем гравитационное излучение двойной системы в Теории Относительности с одним бесконечным дополнительным измерением. Мы также изучаем эффект утечки излучения с браны в рамках скалярного аналога DGP-модели и обсуждаем возможность его экспериментального обнаружения.

Нарушение принципа Гюйгенса

Запаздывающая функция Грина безмассового поля в пространстве Минковского размерности D определяется уравнением

$$\Box G_D(x) = \delta^{(D)}(x),\qquad G_D(x) = 0,\quad x^0 < 0.$$

В нечетных размерностях функции Грина локализованы внутри светового конуса [1]

$$G_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{n-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{n-1} G_3(x),$$
$$G_3(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi}\frac{\theta(x^2)}{\sqrt{x^2}},\quad t = x^0,\quad r = |\mathbf{x}|,$$
$$G_5(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi^2}\left[\frac{\delta(x^2)}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{2}\frac{\theta(x^2)}{(x^2)^{3/2}}\right].$$

Запаздывающие безмассовые поля в нечетных размерностях:

- распространяются со всеми скоростями вплоть до скорости света,
- зависят от полной истории движения источника, предшествующей запаздывающему времени.

Подход Рорлиха-Тейтельбойма

Для частицы с мировой линией $z^\mu(\tau)$ и точки наблюдения x^μ запаздывающее собственное время $\hat\tau$ определяется как (см. рис. (1))

$$(x^\mu - \hat z^\mu)^2 = 0,\quad x^0 > \hat z^0,\quad \hat z^\mu \equiv z^\mu(\hat\tau).$$

Введем три D-вектора и определим с их помощью Лоренц-инвариантное расстояние $\hat\rho$ [2,3] (см. рис. (1))

$$\begin{matrix} \hat X^\mu = x^\mu - \hat z^\mu, & \hat X^2 = 0 \\ \hat u^\mu, \quad \hat u^2 = -1, & \hat v\hat u = 0 \\ \hat c^\mu = \hat v^\mu + \hat u^\mu, & \hat c^2 = 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} \hat X^\mu = \hat\rho\hat c^\mu \\ \hat\rho = \hat v\hat X. \end{matrix}$$

В подходе Рорлиха-Тейтельбойма излучаемая часть тензора энергии-импульса запаздывающего поля определяется как дальнодействующая часть его разложения по обратным степеням $\hat\rho$ [2,3]

$$T^{\mu\nu}_{\rm rad} \sim 1/\hat\rho^{D-2},\quad \partial_\mu T^{\mu\nu}_{\rm rad} = 0,\quad T^{\mu\nu}_{\rm rad} \sim \hat c^\mu\hat c^\nu.$$

Поток энергии излучения через удаленную $(D-2)$-мерную сферу радиуса r определяется как

$$W_D = \int d\Omega_{D-2}\, T^{0i}_{\rm rad}\, n^i\, r^{D-2}.$$

В теориях с ТЭИ билинейным по производным поля можно определить излучаемую часть поля

$$T \sim \partial\Phi\,\partial\Phi,\quad T_{\rm rad} \sim 1/\hat\rho^{D-2} \implies [\partial\Phi]^{\rm rad} \sim 1/\hat\rho^{(D-2)/2}.$$

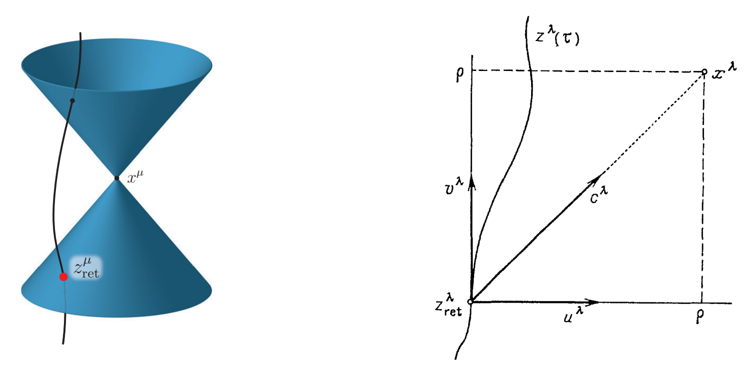

Рис. 1: Ковариантные запаздывающие величины.

Список литературы

[1] D.I. Ivanenko and A.A. Sokolov, Sov. Phys. Doklady 26, 37 (1940).
[2] C. Teitelboim, Phys. Rev. D 1, 1572 (1970).
[3] B.P. Kosyakov, Phys. Usp. 35 (2), 135 (1992).
[4] D.V. Gal'tsov and M. Khlopunov, Phys. Rev. D 101 (8), 084054 (2020).
[5] M. Khlopunov and D.V. Gal'tsov, JCAP 04, 014 (2022).

Скалярное поле в трех измерениях

Уравнение движения скалярного поля, взаимодействующего с точечным зарядом

$$\Box\varphi(x) = -j(x),\quad j(x) = g\int d\tau\,\delta^{(3)}(x-z).$$

Излучаемая часть поля в размерности три имеет вид [4]

$$[\partial_\mu\varphi]^{\rm rad} = \frac{g\hat c_\mu}{2^{3/2}\pi\hat\rho^{1/2}}\int_{-\infty}^{\hat\tau} d\tau\,\frac{a\hat c}{(v\hat c)^2\sqrt{Z\hat c}}$$
$$Z^\mu = \hat z^\mu - z^\mu,\quad a^\mu = d^2z^\mu/d\tau^2.$$

В нерелятивистском пределе, мощность излучения заряда записывается как

$$\frac{dW_3}{d\Omega_1} = \frac{g^2}{8\pi^2}\left[\int_{-\infty}^{\bar t} dt'\,\frac{\mathbf{na}}{\sqrt{\bar t - t'}}\right]^2,\quad \bar t = t - r.$$

Хвостовой вклад проявляется в излучении заряда на эллиптической орбите за счет сдвигов точек экстремума мощности излучения во времени с моментов прохождения зарядом перицентра и апоцентра орбиты

$$W_3 = \frac{g^2\omega_0^3a^2}{4\pi}\int d\Omega_1\,J^2,\quad J \simeq J_{(0)} + eJ_{(1)} + e^2J_{(2)}$$
$$\mathbf{z}(t) = \{\rho\cos\psi,\ \rho\sin\psi\},\quad \omega t = \xi - e\sin\xi$$
$$\rho = a(1 - e\cos\xi),\quad \cos\psi = \frac{\cos\xi - e}{1 - e\cos\xi}.$$

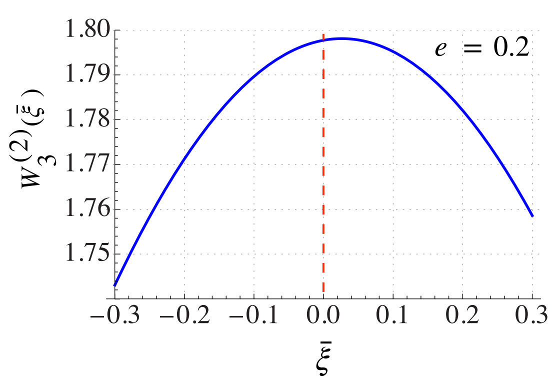

Рис. 2: Зависимость мощности излучения заряда на эллиптической орбите в размерности три от его положения на орбите.

Пятимерная квадрупольная формула

Уравнение движения возмущений пятимерного гравитационного поля, взаимодействующего с двойной системой локализованной на 3-бране

$${}_5\Box\bar h_{MN} = -2\kappa_5\delta^\mu_M\delta^\nu_N\left(T^{\rm P}_{\mu\nu} + T^{\rm F}_{\mu\nu}\right)\delta(x^4)$$
$$T^{\rm P}_{\mu\nu} = \sum m_a\int d\tau_a\,\dot z_{a\mu}\dot z_{a\nu}\,\delta^{(4)}(x - z_a)$$
$$T^{\rm F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi\right].$$

Тензор энергии-импульса гравитационного поля

$$t_{MN} = \frac{1}{4\kappa_5}\left\langle\partial_M\bar h^{\rm tt}_{ij}\,\partial_N\bar h^{\rm tt}_{ij}\right\rangle$$
$$\bar h^{\rm tt}_{0M} = 0,\quad \partial^i\bar h^{\rm tt}_{ij} = 0,\quad \bar h^{\rm tt}_{ij} = 0.$$

В размерности $D = 5$ гравитационное поле имеет пять поляризаций, но наблюдатель на 3-бране детектирует лишь три из них

$$\bar h^{\rm tt}_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ - \frac{1}{2}h_\circ & h_\times & 0 & h_\oplus \\ h_\times & -h_+ - \frac{1}{2}h_\circ & 0 & h_\otimes \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_\oplus & h_\otimes & 0 & h_\circ \end{pmatrix}$$
$$h_+ = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}),\quad h_\times = h_{12},$$
$$h_\circ = \frac{2}{3}h_{44} - \frac{1}{3}(h_{11} + h_{22}).$$

Квадрупольная формула для мощности гравитационного излучения нерелятивистской двойной системы [5]

$$\frac{dW_5}{d\Omega_3} = \frac{\kappa_5}{128\pi^4}\left\langle\mathcal{A}^{\rm tt}_{ij}\mathcal{A}^{\rm tt}_{ij}\right\rangle,\quad \mathcal{A}_{ij} = \int_{-\infty}^{\bar t} dt'\,\frac{\ddddot{Q}_{ij}}{\sqrt{\bar t - t'}}$$
$$\frac{dW_5}{d\Omega_3} = \frac{\kappa_5}{64\pi^4}\left\langle\mathcal{A}_+^2 + \mathcal{A}_\times^2 + \frac{3}{4}\mathcal{A}_\circ^2 + \mathcal{A}_\oplus^2 + \mathcal{A}_\otimes^2\right\rangle.$$

Двойная система, локализованная на 3-бране, генерирует все пять поляризаций гравитационного поля. При этом дышащая мода $h_\circ$ переносит на 25% меньше энергии, чем другие поляризации.

Список литературы

[6] G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. B 485, 208 (2000).
[7] M. Luty, M. Porrati and R. Rattazzi, JHEP 09, 029 (2003).
[8] M. Khlopunov and D. V. Gal'tsov, JCAP 10, 062 (2022).

Утечка излучения в DGP-модели

Скалярный аналог DGP-модели гравитации [6]

$$\begin{matrix} S = M_5^3\int d^5X\sqrt{-\mathcal{G}}\mathcal{R} \\ + M_4^2\int d^4x\sqrt{-g}R \end{matrix} \implies \begin{matrix} S = M_5^3\int d^4x\,dy\,(\partial_M\varphi)^2 \\ + M_4^2\int d^4x\,dy\,\delta(y)\,(\partial_\mu\varphi)^2. \end{matrix}$$

Эффективные четырехмерные уравнение движения и тензор энергии-импульса поля на 3-бране [7]

$${}_4\Box\varphi - 2m_c\sqrt{{}_4\Box}\varphi = -\frac{1}{2M_4^2}j(x),\quad m_c = \frac{M_5^3}{M_4^2}$$
$$T_{\mu\nu} = 2M_4^2\left(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\varphi\partial_\alpha\varphi\right).$$

Гравитон на бране является метастабильной частицей со временем жизни $1/m_c$. Это приводит к утечке гравитационных волн с браны на больших расстояниях от источника. Запаздывающая функция Грина поля на 3-бране

$$G_{DGP}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\mu\,\rho(\mu)\,G_4(x|\mu),\quad \rho(\mu) = \frac{4m_c^2}{\mu^2 + 4m_c^2}$$
$$G_4(x|\mu) = \frac{\theta(t)}{2\pi}\left[\delta(x^2)J_0\left(\mu\sqrt{x^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\theta(x^2)}{\sqrt{x^2}}\mu J_1\left(\mu\sqrt{x^2}\right)\right].$$

Излучаемая часть поля точечного заряда на бране в нерелятивистском пределе

$$[\partial_\mu\varphi]^{\rm rad} = -\frac{g\bar c_\mu}{8\pi^2M_5^3r}\int_{-\infty}^{\bar t} dt'\,\mathbf{n}\dot{\mathbf{a}}\int_0^\infty d\mu\,\rho(\mu)$$
$$\times J_0\left(\mu\sqrt{2r(\bar t - t')}\right),\quad \bar c^\mu = \{1, \mathbf{n}\}.$$

Эффективная четырехмерная мощность излучения заряда на круговой орбите [8]

$$W(r) = W_0\left[1 - 2C(x) - 2S(x) + 2C^2(x) + 2S^2(x)\right]$$
$$W_0 = \frac{g^2R^2\omega^4}{24\pi M_4^2},\quad x \equiv \sqrt{2\bar r/\bar\omega},\quad \bar r = rm_c,\quad \bar\omega = \frac{\omega}{m_c},$$

где $S(x), C(x)$ – интегралы Френеля. Вводя нормированную мощность излучения $\overline{W}$ и определяя интенсивность утечки излучения с браны $\Delta\overline{W}$ как

$$\overline{W}(\bar r) = W(\bar r)/W_0,\quad \Delta\overline{W} = 1 - \overline{W}(1),$$

находим, что для $m_c \sim 10^{-42}$ ГэВ интенсивность утечки излучения крайне мала [8]

- LIGO/VIRGO: $\Delta\overline{W} \sim 2\cdot 10^{-10}$,
- LISA: $\Delta\overline{W} \sim 9\cdot 10^{-8}$,
- Реалистичный случай: $\Delta\overline{W} > 10^{-2} \leftrightarrow m_c > 10^{-27}$ ГэВ.

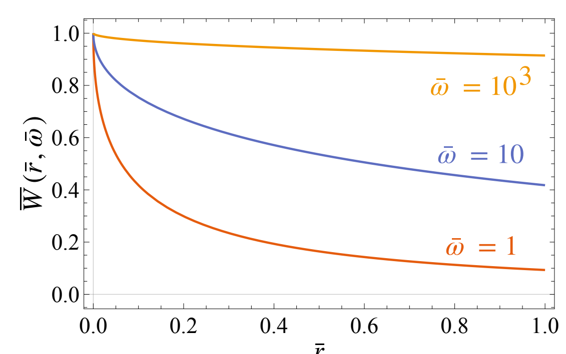

Рис. 3: Зависимость эффективной мощности излучения заряда на круговой орбите на бране от расстояния до наблюдателя.

Заключение

- В нечетных размерностях излучение можно вычислить интегрированием потока энергии в волновой зоне с помощью применения подхода Рорлиха-Тейтельбойма к излучению.
- Поток энергии излучения зависит от истории движения источника, предшествующей запаздывающему времени.
- В модели скалярного поля в трех измерениях показано наличие нелокального хвостового сигнала в излучении заряда на эллиптической орбите.
- Получена пятимерная квадрупольная формула для мощности гравитационного излучения нерелятивистской двойной системы на 3-бране.
- В скалярно-полевом аналоге DGP-модели оценена интенсивность утечки излучения с браны для случая нерелятивистского заряда на круговой орбите.
- Для $m_c \sim 10^{-42}$ ГэВ интенсивность утечки излучения крайне мала и недоступна для экспериментального наблюдения.
- Утечка излучения может быть обнаружена при больших значениях характерной массы DGP-модели $m_c > 10^{-27}$ ГэВ.