Квазиклассический предел в замкнутой изотропной модели в рамках различных подходов

Дарья Павловна Кислякова
Южный федеральный университет

1. Введение

В докладе рассматривается переход к квазиклассическому пределу в замкнутой модели Вселенной со скалярным полем, разложенным по амплитудам. Вычисления проделаны в рамках трех подходов к квантованию гравитации. Два из них основаны на **геометродинамике Уилера-Де Витта**, третьим рассматривается **формализм расширенного фазового пространства**. Этот подход является калибровочно-неинвариантным.

Для перехода к квазиклассическому пределу используется **приближение Борна-Оппенгеймера для гравитации**. Это аналог того приближения, которое используется в квантовой механике, только в данном случае роль тяжелой частицы играет гравитационное поле, а скалярное поле на его фоне принимается за легкую. При этом, так же, как и в случае ВКБ-приближения, действие раскладывается в ряд по некоторому параметру. Нас будет интересовать нулевой порядок разложения, так как в нем будет получаться временное уравнение Шредингера для материи и, особенно, минус первый порядок, так как ему будет соответствовать **уравнение Шредингера с квантовогравитационными поправками**. Сравнение этих поправок в рамках трех подходов и является основной целью работы.

2. Модель, уравнение Шредингера и уравнение Уилера - Де Витта

Общий вид действия в формализме расширенного фазового пространства

$$S_{eff} = S_{grav} + S_{mat} + S_{gf} + S_{ghost},$$

S_{gf} - член, фиксирующий калибровку.

Метрика: $ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)(d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$.

Для скалярного поля используется голоморфное представление. Переход к нему от однородного скалярного поля осуществляется по формуле: $\varphi_c(\vec{x}) = \sum_k b_k(t)\Phi_k(\vec{x})$, где $\Phi_k(\vec{x})$ - собственные функции лапласиана для пространства с положительной кривизной.

Учитывая это, действие переписывается в виде

$$S = \int\left[\frac{1}{2}\left(-M\frac{a\dot{a}^2}{N} + MNa\right) - \frac{1}{2}\sum_k (b_k^*\dot{b}_k - \frac{N}{a}\hbar\lambda_k b_k^* b_k) + \pi\left(\dot{N} - \frac{df}{da}\dot{a}\right) + \dot{\bar{\theta}}N\dot{\theta}\right]dt.$$

Уравнение Шредингера, полученное из континуального интеграла

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2}\frac{f(a)}{aM}\frac{\partial^2\psi}{\partial a^2} - \frac{\hbar^2}{4M}\left(\frac{f(a)}{a^2} - \frac{1}{a}\frac{df}{da}\right)\frac{\partial\psi}{\partial a} - \frac{M}{2}f(a)a\psi + \frac{\hbar}{2}\frac{f(a)}{a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial\psi}{\partial b_k^*}.$$

Уравнение Уилера – Де Витта

$$\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{aM}\frac{\partial^2\psi}{\partial a^2} - \frac{\hbar^2}{4a^2M}\frac{\partial\psi}{\partial a} - \frac{M}{2}a\psi + \frac{\hbar}{2a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial\psi}{\partial b_k^*} = 0.$$

3. Квазиклассический предел и старшие порядки разложения

Квазиклассическая волновая функция

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}S} \qquad S = MS_0 + S_1 + \frac{1}{M}S_2 + O\left(\frac{1}{M^2}\right) + \cdots \quad M\to\infty$$

$M = c^3/16\pi G$ (совпадает с коэффициентом в выражении для гравитационного действия).

В приближении Борна - Оппенгеймера в *O(M)* порядке получается уравнение Гамильтона - Якоби для чистой гравитации. Чтобы получить этот результат для скалярного поля, разложенного по амплитудам, считаем, что

$$S_0 = S_0(a), \qquad S_1 = S_1(a, b_k^*, c_k^*), \qquad S_2 = S_2(a, b_k^*, c_k^*).$$

Следовательно, $\psi = e^{\frac{i}{\hbar}(MS_0 + S_1 + \frac{1}{M}S_2)}e^{\frac{i}{\hbar}(Q_1 + \frac{1}{M}Q_2)}$.

Уравнение Гамильтона - Якоби

$$O(M):\ \frac{1}{a}\left(\frac{\partial S_0}{\partial a}\right)^2 + a = 0 \quad\rightarrow\quad S_0 = i\frac{a^2}{2}.$$

4. Временное уравнение Шредингера

Уравнение в порядке $O(M^0)$ сводится к временному уравнению Шредингера для скалярного поля на фоне гравитационного. Это уравнение будет получено в рамках трех подходов. Первым рассмотрим подход, который используется в работах ***Кифера*** и соавторов. В основе подхода лежит геометродинамика Уилера – Де Витта. В этом случае порядку $O(M^0)$ соответствует уравнение

$$O(M^0):\ -\frac{i\hbar}{2a}\frac{\partial^2 S_0}{\partial a^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial S_0}{\partial a}\frac{\partial S_1}{\partial a} + \frac{i\hbar}{4a^2}\frac{\partial S_0}{\partial a} - \frac{i}{2a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial S_1}{\partial b_k^*} = 0.$$

В уравнение необходимо ввести производную по времени. Для этого делаются несколько предположений. Во-первых, волновая функция поля материи ищется в виде: $\chi = D(a)e^{\frac{i}{\hbar}S_1}$. $D(a)$ – изначально неизвестная функция. Для нашей модели $D = a^{\frac{1}{4}}$.

Затем, временная переменная вводится как параметр вдоль классической траектории частицы, то есть

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial S_0}{\partial a}\frac{\partial\chi}{\partial a} = \frac{\partial\chi}{\partial\tau}.$$

После этих преобразований получается искомое уравнение:

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial\tau} = H_m\chi \qquad\qquad H_m = \frac{\hbar}{2a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial}{\partial b_k^*}.$$

Следующий подход предложен ***Монтани*** с соавторами. В этом случае появление времени обусловлено введением жидкости Кухарша – Торра, играющей роль системы отсчета.

Рассматриваем также нулевой порядок. В этом подходе записываются отдельно уравнение для гравитационной части, которое приравнивается к нулю и уравнение для всей системы

$$0 = \frac{i\hbar}{2a}\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial a^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\frac{\partial\sigma_1}{\partial a} - \frac{i\hbar}{4a^2}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a},$$

$$-\frac{\partial\eta_1}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2a}\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial a^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\frac{\partial\sigma_1}{\partial a} - \frac{1}{a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\frac{\partial\eta_1}{\partial a} - \frac{i\hbar}{4a^2}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a} + \frac{i}{2a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial\eta_1}{\partial b_k^*}.$$

В силу первого условия, второе уравнение сводится к виду

$$O(M^0):\ -\frac{\partial\eta_1}{\partial t} = -\frac{1}{a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\frac{\partial\eta_1}{\partial a} + \frac{i}{2a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial\eta_1}{\partial b_k^*}.$$

Для волновой функции скалярного поля $\chi = e^{\frac{i}{\hbar}\eta_1}$ получаем уравнение

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial\tau} = H_m\chi + \frac{i\hbar}{a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\frac{\partial\chi}{\partial a}.$$

Авторы полагают $\partial\chi/\partial a \to 0$, что позволяет избавится от лишнего слагаемого и прийти к временному уравнению Шредингера.

В случае ***формализма расширенного фазового пространства*** время уже присутствует в изначальном уравнении Шредингера для системы, поэтому вводить его не требуется.

В нулевом порядке имеем уравнение

$$O(M^0):\ \frac{\partial S_1}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2}\frac{f(a)}{a}\frac{\partial^2 S_0}{\partial a^2} + \frac{f(a)}{a}\frac{\partial S_0}{\partial a}\frac{\partial S_1}{\partial a} + \frac{i\hbar}{4}\left(\frac{f(a)}{a^2} - \frac{1}{a}\frac{df(a)}{da}\right)\frac{\partial S_0}{\partial a} - \frac{if(a)}{2a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial S_1}{\partial b_k^*}.$$

Приравняв к нулю часть слагаемых, приходим к искомому уравнению Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = H_m\chi\,,$$

где

$$H_m = \frac{\hbar f(a)}{2a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial}{\partial b_k^*} \quad\text{и}\quad \chi = e^{\frac{i}{\hbar}S_1}.$$

5. Уравнение Шредингера с квантовогравитационными поправками

Рассматриваем следующий порядок разложения. В подходе ***Кифера*** получаем

$$O(M^{-1}):\ \frac{i\hbar}{2a}\frac{\partial^2 S_1}{\partial a^2} - \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial S_1}{\partial a}\right)^2 - \frac{1}{a}\frac{\partial S_0}{\partial a}\frac{\partial S_2}{\partial a} - \frac{i\hbar}{4a^2}\frac{\partial S_1}{\partial a} + \frac{i}{2a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial S_2}{\partial b_k^*} = 0.$$

Решение для S_2 ищется в виде $S_2 = \sigma_2(a) + \eta_2(b_k^*, a)$. Уравнение для σ_2 приравнивается к нулю. В силу этого для скалярного поля получается уравнение

$$\frac{1}{a}\frac{\partial S_0}{\partial a}\frac{\partial\eta_2}{\partial a} = \frac{\hbar^2}{2a}\left(\frac{1}{\chi}\frac{\partial^2\chi}{\partial a^2} - \frac{2}{D\chi}\frac{\partial\chi}{\partial a}\frac{\partial D}{\partial a}\right) - \frac{\hbar^2}{4a^2\chi}\frac{\partial\chi}{\partial a} + \frac{i}{2a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial\eta_2}{\partial b_k^*}.$$

Волновая функция для данного порядка: $\xi = \chi e^{\frac{i}{\hbar M}\eta_2}$.

Учитывая, что $D = a^{\frac{1}{4}}$, приходим к уравнению Шредингера с поправками

$$i\hbar\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{\hbar^2}{2aM}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial\xi}{\partial a}\right) + H_m\xi.$$

В подходе ***Монтани*** этому порядку соответствует уравнение для поля материи

$$O(M^{-1}):\ \frac{\partial\eta_2}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2a}\frac{\partial^2\eta_1}{\partial a^2} + \frac{1}{a}\frac{d\sigma_1}{da}\frac{d\eta_1}{da} + \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial a}\right)^2 + \frac{1}{a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\frac{\partial\eta_2}{\partial a} + \frac{i\hbar}{4a^2}\frac{\partial\eta_1}{\partial a} - \frac{i}{2a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial\eta_2}{\partial b_k^*}.$$

Для волновой функции $\xi = \chi e^{\frac{i}{\hbar}(\eta_1 + \frac{1}{M}\eta_2)}$ получаем уравнение с поправками

$$i\hbar\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\hbar^2}{2Ma}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial\xi}{\partial a}\right) + H_m\xi.$$

Предположению о малости производной $\partial\chi/\partial a$ позволяет избавиться от слагаемых в скобке. Авторы используют такое приближение, так как в этом случае поправка имеет вид, схожий с выражением для оператора импульса, который является эрмитовым. Но при этом не учитывается, что в условие эрмитовости входит также мера конфигурационного пространства, которая может быть нетривиальной

$$\int\Xi^*\,(\widehat{H_1}\Xi)\mu da = \int(\widehat{H_1}\Xi)\Xi^*\,\mu da.$$

Так, в данном случае $\mu = \sqrt{a/N}$, и это условие не выполняется.

В ***формализме расширенного фазового пространства*** имеем

$$O(M^{-1}):$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2}\frac{f(a)}{a}\frac{\partial^2 S_1}{\partial a^2} - \frac{1}{2}\frac{f(a)}{a}\left(\frac{\partial S_1}{\partial a}\right)^2 - \frac{f(a)}{a}\frac{\partial S_0}{\partial a}\frac{\partial S_2}{\partial a} - \frac{i\hbar}{4}\left(\frac{f(a)}{a^2} - \frac{1}{a}\frac{df(a)}{da}\right)\frac{\partial S_1}{\partial a} + i\frac{f(a)}{a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial S_2}{\partial b_k^*}.$$

В этом случае действие ищется в виде суммы: $S_2 = \sigma_2(a,t) + \eta_2(b_k^*, t)$. Также отделяя чисто гравитационную часть, для поля материи получаем уравнение

$$-\frac{\partial\eta_2}{\partial t} = \hbar^2\frac{f(a)}{2a\chi}\frac{\partial^2\chi}{\partial a^2} - \frac{\hbar^2}{4a\chi}\left(\frac{f(a)}{a^2} - \frac{1}{a}\frac{df}{da}\right)\frac{\partial\chi}{\partial a} + i\frac{f(a)}{2a}\sum_k\lambda_k b_k^*\frac{\partial\eta_2}{\partial b_k^*}.$$

После подстановки $\xi = \chi e^{\frac{i}{\hbar M}\eta_2}$ приходим к результату

$$i\hbar\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2}\frac{f(a)}{aM}\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} - \frac{\hbar^2}{4Ma}\left(\frac{f(a)}{a} - \frac{df(a)}{da}\right)\frac{\partial\xi}{\partial a} + H_m\xi.$$

6. Заключение

Таким образом, на примере изотропной модели рассмотрен переход к квазиклассическому пределу в рамках трех подходов. Каждый из них предполагает введение дополнительных условий без обоснования физического смысла. Полученные поправки к уравнению Шредингера имеют разный вид для каждого подхода. Это дает некоторый шанс на экспериментальную проверку теоретических предсказаний в случае, когда будет достигнута необходимая точность наблюдений.

`