Релятивистские волновые уравнения для массивных полей высших спинов

Щербатов Давид
Томский государственный университет, физический факультет

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Аннотация
Сформулированы критерии приведения системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных к (пред)лагранжевой форме с помощью вспомогательных полей. В случае ко-плоских теорий предъявлен универсальный алгоритм включения вспомогательных полей. Для массивных полей высших спинов построены новые лагранжевые формулировки, содержащие меньшее число вспомогательных полей по сравнению с известными до этого. Доказано существование предлагранжевых уравнений движения для массивных высших спинов, без вспомогательных полей. Для частицы спина два показано, что в общем случае такие уравнения, однако, не обладают явной лоренц-инвариантностью.

Метод вспомогательных полей

Как известно, массивная частица спина s описывается симметричным бесследовым тензором ранга s, который удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$(\Box - m^2)\phi_{\mu_1\cdots\mu_s} = 0\,, \qquad \partial^{\mu_1}\phi_{\mu_1\cdots\mu_s} = 0\,.$$

Несложно заметить, что эта система не квадратная, а значит не может быть получена из принципа наименьшего действия, что является проблемой для последующего квантования. Впервые решение этой проблемы было предложено Фирцом и Паули для спина 2. Идея заключалась в расширении системы набором новых полей, подчиняющемся следующим правилам:

- Новая система должна быть эквивалентна исходной;
- Вспомогательные поля должны равняться нулю на на решениях.

Позже эта идея была развита Сингхом и Хагеном на случай произвольного спина. В их работе были построены лагранжевые формулировки, включающие для частиц целого спина s набор вспомогательных полей ранга от 0 до s-2. Тем не менее, так как большое количество полей значительно осложняет анализ, имеет смысл поиск альтернативных лагранжевых формулировок, допускающих меньшее количество полей и, как следствие, более простое включение взаимодействия.

Системы дифференциальных уравнений и их свойства

В данной работе системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами будут ассоциироваться с дифференциальными операторами. Под дифференциальным оператором мы будем понимать выражение

$$(\hat{A}f)_\alpha = \sum_{a=1}^{n} A_{a\alpha}(\partial) f_a\,, \qquad \alpha = 1,\dots,m\,,$$

где $A(p)\colon R^n \to R^m$ – полиномиальная матрица, из которой оператор получается заменой $p_i \to \partial_i$. Матрицу A мы будем называть символом оператора Â. Нас будут особенно интересовать следующие свойства символов дифференциальных операторов:

- Лагранжевость: $A(p) = A^t(p)$.
- Наличие оператора совместности: $\exists\, A_1\colon \quad A_1 A \equiv 0\,.$
- Отсутствие калибровочных симметрий: $\ker A = 0\,.$

Ключевым инструментом в анализе систем дифференциальных уравнений является *теорема Гильберта о сизигиях*, которая утверждает, что любой конечно-порождённый модуль допускает свободную резольвенту конечной длины. Особенно нас будут интересовать *ко-плоские системы*, допускающие резольвенту следующего вида:

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}^l \xrightarrow{A_1} \mathcal{P}^m \xrightarrow{A} \mathcal{P}^n \longrightarrow \operatorname{coker} A \longrightarrow 0\,.$$

Универсальный алгоритм введения вспомполей

В данной работе особенное внимание уделяется ко-плоским системам, для которых существует унимодулярная матрица тождеств. Стоит отметить, что такие системы охватывают большое количество интересных физических задач, например, к таким относятся волновые уравнения всех массивных частиц целого спина. Для таких систем задача построения лагранжевой формулироки сводится к двум подзадачам:

1) Приведению системы к предлагранжевой форме, в которой количество уравнений совпадает с количеством неизвестных.
2) Поиску унимодулярной матрицы перехода от предлагранжевой формы к лагранжевой, оператор которой эрмитов.

Можно показать, что для ко-плоских систем всегда можно успешно решить обе подзадачи, в частности первая всегда сводится к поиску правой обратной к матрице тождеств. В применении к частицам целого спина это означает, что для построения лагранжевой формулировки достаточно одного вспомогательного поля ранга s-1. Ценой за меньшее количество полей являются высокие степени производных, входящие в лагранжиан. Так для произвольного целого спина лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{s}(-1)^n(\partial^n\phi)\cdot A_n(\partial^n\phi) + \sum_{n=0}^{s-1}(-1)^n(\partial^n\psi)\cdot B_n(\partial^n\psi) + \sum_{n=1}^{s}(-1)^n(\partial^n\phi)\cdot C_n(\partial^{n-1}\psi)\,.$$

Здесь заглавными буквами обозначены скалярные коэффициенты, являющиеся полиномами по оператору Д'Аламбера □.

Лагранжевая формулировка без вспомполей

Дальнейшее исследование показывает, что в случае ко-плоских систем можно обойтись и без вспомогательных полей вовсе. Это следует из *теоремы Квиллена–Суслина*, согласно которой любая унимодулярная матрица допускает унимодулярное дополнение до квадратной, причём определитель дополненной матрицы равен ненулевой константе.
В таком случае можно задаться задачей поиска лагранжевой формы, не включающей вспомогательные поля. Построение такой системы сводится к построению дополнения матрицы тождеств до элементарной:

$$A_1 \to \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B \end{pmatrix}, \quad \det \tilde{A}_1 = \mathrm{const} \neq 0\,.$$

Не смотря на исключение вспомогательных полей, построение лагранжевой формы таким способом сопряжено с рядом трудностей.
В частности, теорема Квиллена–Суслина не гарантирует лоренц-инвариантность предлагранжевых уравнений. Так для случая спина 2 было показано, что таким образом невозможно построить лоренц-инвариантный лагранжиан без вспомогательных полей.
Вторым препятствием для построения лагранжевой формулировки без вспомогательных полей являются громоздкие вычисления: результат для унимодулярного дополнения в случае спина 2, полученный с помощью программного пакета MAPLE, занимает 30 страниц. Тем не менее стоит заметить, что унимодулярное дополнение определено неоднозначно и вид результата зависит от применяемого алгоритма.