

# Сильно экранированные двумерные магнитоплазмоны и ротационно-гравитационные волны на мелкой воде в прямоугольнике



Родионов Данил Александрович<sup>1,2\*</sup>, И.В. Загороднев<sup>1</sup>

1. ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
2. МФТИ

\*rodionov.da@phystech.edu



ResearchGate\*

Летняя школа фонда «Базис» «Современные проблемы физики конденсированного состояния» (21 июля – 1 августа 2024)

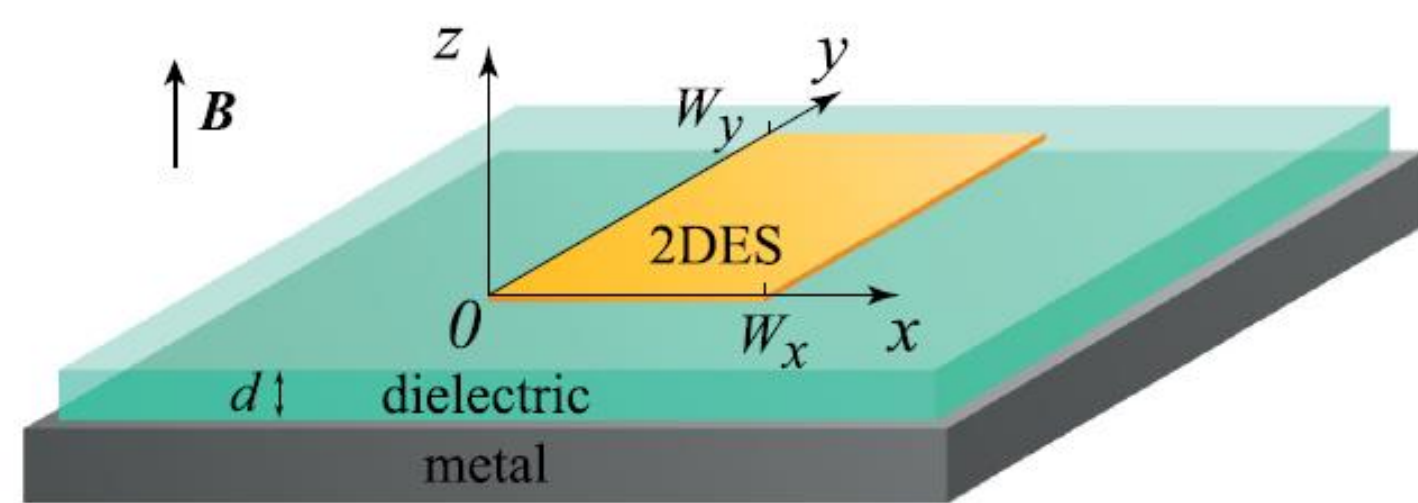
BASIS

## Актуальность работы

- Первый эксперимент по магнитоплазмонам в квадрате [A. M. Zarezin, D. Mylnikov, A. S. Petrov, D. Svintsov, P. A. Gusikhin, I. V. Kukushkin, V. M. Muravev, Phys. Rev. B 107, 075414 (2023)].
- Не исследованы волны на мелкой воде в прямоугольном бассейне.

## Аналогия

- Сильно экранированная двумерная электронная система (2DES)



Предел сильной экранировки:

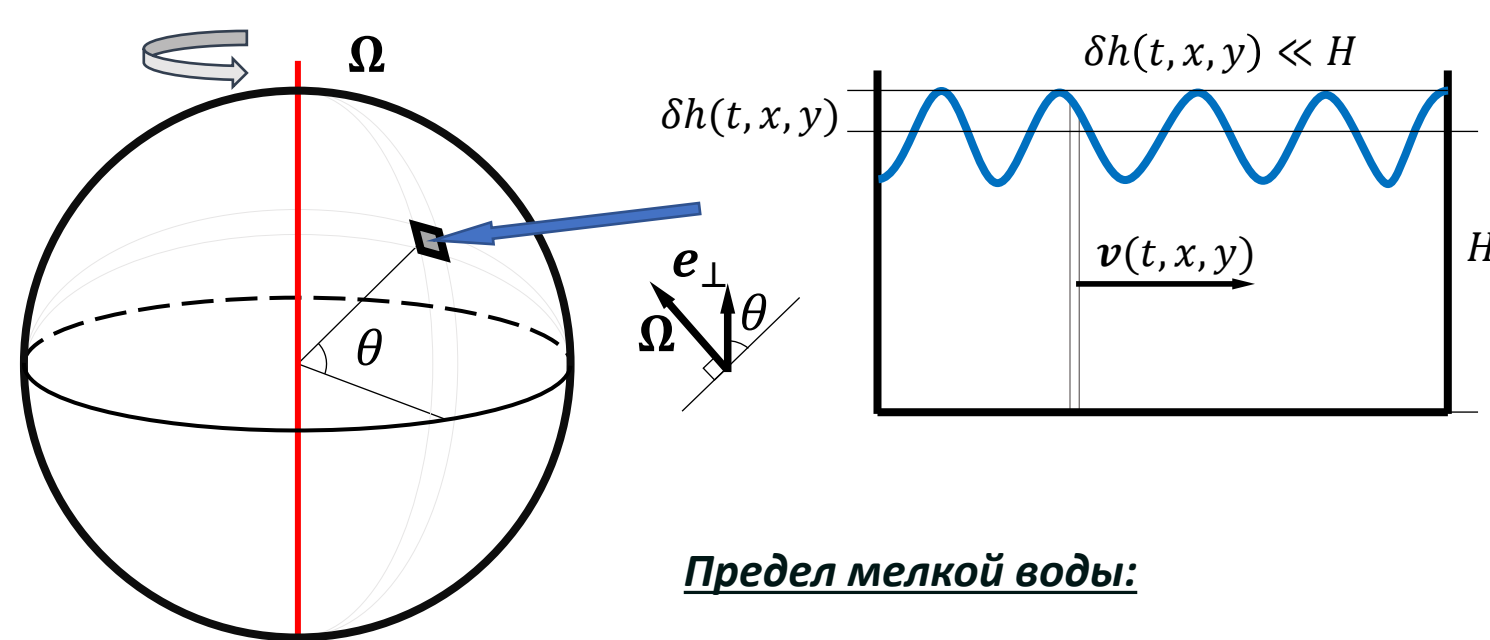
$$d \ll \min(W_x, W_y), d \ll \lambda_{pl} \Rightarrow \varphi(t, x, y) = \frac{4\pi d}{\epsilon} \delta\rho(t, x, y)$$

Проводимость в модели Друэ:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{n_s e^2}{m} \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{n_s e^2}{m} \frac{\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad \omega_c = \frac{eB}{mc}$$

—  $e$  – заряд электрона,  
 $m$  – эффективная масса электрона,  
 $n_s$  – двумерная концентрация электронов,  
 $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость подложки,  
 $B$  – внешнее магнитное поле

- Гидродинамическая система с мелкой водой



Предел мелкой воды:

$$\delta h \ll H \ll \min(W_x, W_y), H \ll \lambda_w$$

## Уравнения динамики

- волн в 2DES

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(t, x, y) + \omega_c [\mathbf{j}(t, x, y) \times \mathbf{e}_z] &= v_{pl} \nabla \delta\rho(t, x, y), v_{pl} = \sqrt{\frac{4\pi n_s e^2 d}{\epsilon m}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta\rho(t, x, y) + \nabla \cdot \mathbf{j}(t, x, y) &= 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Big|_{edge} = 0 \end{aligned} \right.$$

- волн на мелкой воде:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(t, x, y) + 2\Omega \sin \theta [\mathbf{v}(t, x, y) \times \mathbf{e}_z] &= v_w \nabla \frac{\delta h(t, x, y)}{H}, v_w = \sqrt{gH} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta h(t, x, y)}{H} + \nabla \cdot \mathbf{v}(t, x, y) &= 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Big|_{edge} = 0 \end{aligned} \right.$$

## Соответствие физических величин:

$$\mathbf{v}(t, x, y) \leftrightarrow \frac{\mathbf{j}(t, x, y)}{-en_s}, \quad \frac{\delta h(t, x, y)}{H} \leftrightarrow \frac{\delta\rho(t, x, y)}{-en_s}, \quad v_w \leftrightarrow v_{pl}, \quad 2\Omega \sin \theta \leftrightarrow \omega_c$$

## Соответствие терминологии:

«Объемные» магнитоплазмоны	↔	Волны Пуанкаре
Краевые магнитоплазмоны	↔	Волны Кельвина

## Метод решения

Уравнение для плотности тока имеет следующий вид:

$$-v_{pl}^2 \hat{D} \mathbf{j}(x, y) - i\omega \omega_c \hat{R} \mathbf{j}(x, y) = \omega^2 \mathbf{j}(x, y)$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь операторы  $i\hat{R}$  и  $\hat{D}$  являются эрмитовыми в Гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$(\mathbf{f} | \mathbf{g}) = \int_0^{W_x} \int_0^{W_y} \mathbf{f}^*(x, y) \cdot \mathbf{g}(x, y) dx dy,$$

где функции  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  имеют нулевую нормальную компоненту на границе прямоугольника.

Плотность тока ищем в виде:

$$|\mathbf{j}\rangle = \sum_{n_x, n_y} C_{n_x, n_y} |n_x, n_y\rangle$$

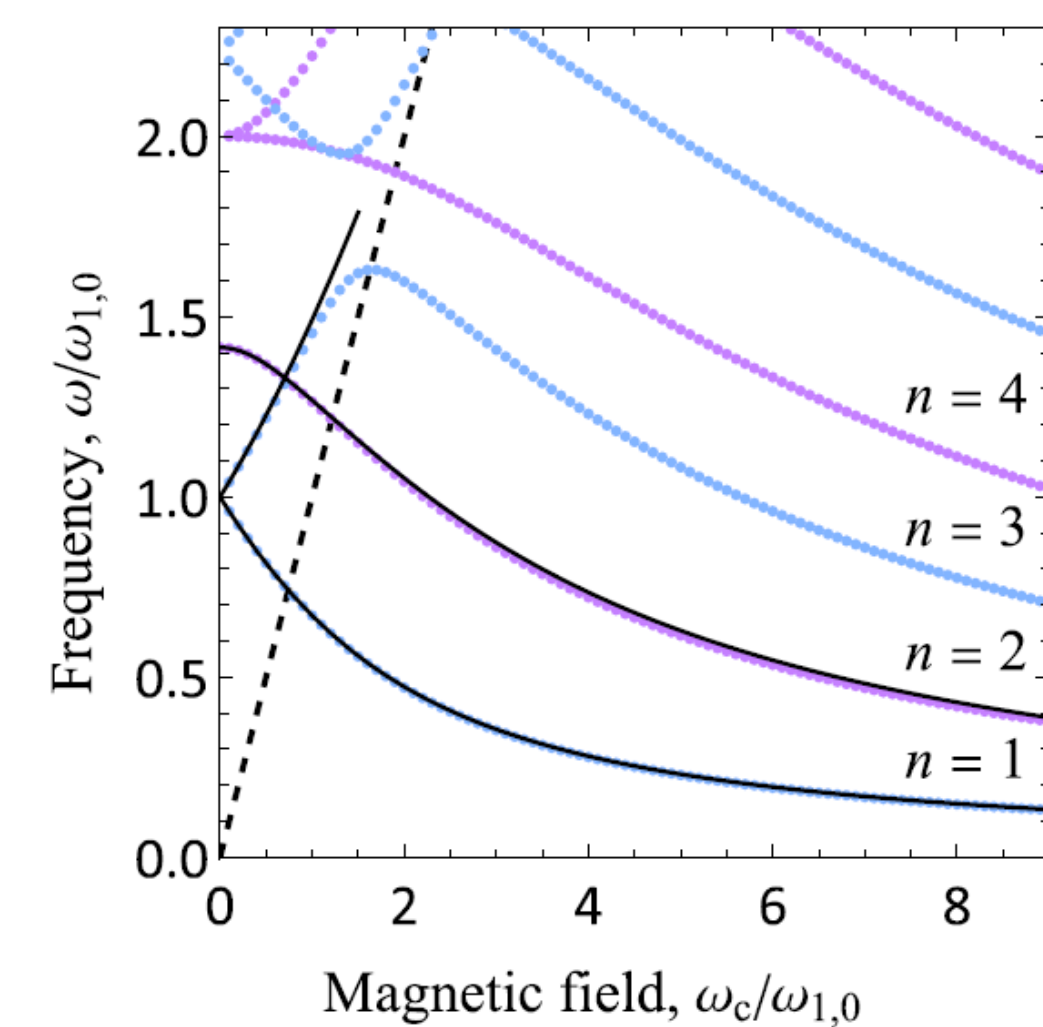
Здесь через  $|n_x, n_y\rangle$  обозначается плотность тока собственной плазменной моды в отсутствие магнитного поля, которая характеризуется двумя целыми неотрицательными числами  $n_x$  и  $n_y$ . Частота этих мод есть

$$\omega_{n_x, n_y}^2 = v_{pl}^2 \left[ \left( \frac{n_x \pi}{W_x} \right)^2 + \left( \frac{n_y \pi}{W_y} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Подставляя разложение в исходное уравнение и домножая, на каждое эрмитово сопряженное состояние мы приходим к системе линейных уравнений на неизвестные коэффициенты.

Явный расчет матричного элемента  $\langle n_x, n_y | i\hat{R} | n'_x, n'_y \rangle$  показывает, что полученная система уравнений распадается на две независимые подсистемы. Первая из них определяет взаимодействие между модами с четной суммой индексов  $n_x$  и  $n_y$ , а вторая – с нечетной.

## Результаты в квадрате



Зависимость частоты плазменных колебаний в квадрате от циклотронной частоты, деленной на определенную в (1) частоту  $\omega_{1,0}$ . Точки соответствуют численному решению. Разные цвета показывают принадлежность к различным подсистемам уравнений. Сплошные кривые представляют аналитический результат из (2) и (3). Пунктирная прямая  $\omega = \omega_c$ .

### Аппроксимация

- Суперпозиция мод  $C_{1,0}|0, 1\rangle + C_{0,1}|1, 0\rangle$ :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{1,0}^2 + (0.41\omega_c)^2} - 0.41\omega_c \quad (2)$$

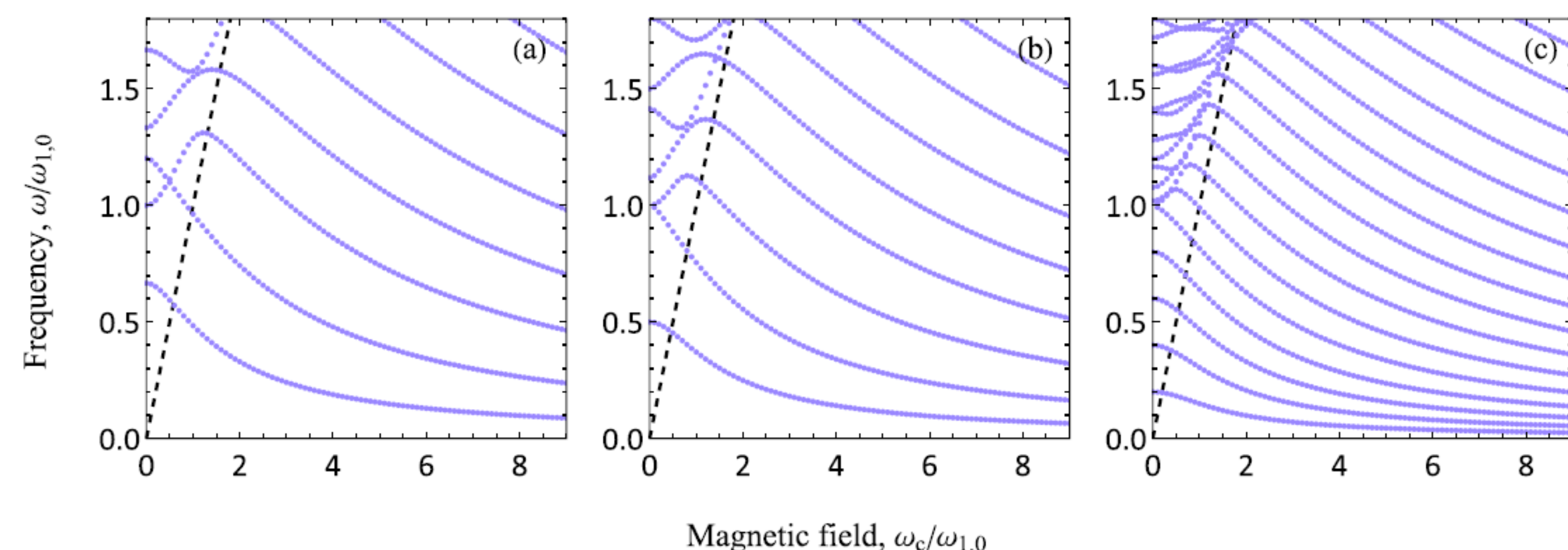
- Суперпозиция мод  $C_{1,1}|1, 1\rangle + C_{2,0}|2, 0\rangle + C_{0,2}|0, 2\rangle$ :

$$\omega_2 = \omega_{1,1} \sqrt{1.5 + a^2 - \sqrt{0.25 + 3a^2 + a^4}} \quad (3)$$

$$a = 0.54 \frac{\omega_c}{\omega_{1,1}}$$

В сильных магнитных полях частота основного краевого магнитоплазмона обратно пропорциональна циклотронной частоте, что отличается от его поведения в других геометриях таких как полоса или диск, где частота выходит на ненулевое асимптотическое значение [I.V. Zagorodnev et al., Nanomaterials 13, 975 (2023)].

## Результаты в прямоугольнике



Зависимость частоты плазменных колебаний в квадрате от циклотронной частоты, деленной на определенную в (1) частоту  $\omega_{1,0}$ . Точки соответствуют численному решению. Результаты приведены для различных соотношений сторон: (a)  $W_y = 1.5W_x$ , (b)  $W_y = 2W_x$  и (c)  $W_y = 5W_x$ . Пунктирная прямая  $\omega = \omega_c$ .

## Заключение и замечания

- Частота фундаментальной моды в сильных магнитных полях стремится обратно пропорционально циклотронной частоте к нулю, что отличается от результата в бесконечной полосе или диске.
- Найдены аналитические аппроксимации магнитодисперсии нижайших плазменных мод в 2DES в форме квадрата.
- Показана аналогия между магнитоплазменными колебаниями в сильно экранированной 2DES и ротационно-гравитационными волнами на мелкой воде в латерально ограниченных системах.  
«Объемные» магнитоплазмоны ↔ Волны Пуанкаре | Краевые магнитоплазмоны ↔ Волны Кельвина
- Частота гидродинамических волн ~ 1 мкГц, а частота плазменных колебаний ~ 1 ГГц.
- Возможно, аналогия может быть распространена и на нелинейный режим колебаний, но точно не полностью (эффект опрокидывания волны).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.  
 Родионов Д.А. благодарит Фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС»  
 (грант № 21-1-5-133-1).

Результаты исследования опубликованы в Physical Review B:

Fully screened two-dimensional magnetoplasmons and rotational gravity shallow water waves in a rectangle  
 DOI: [10.1103/PhysRevB.109.L241402](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.109.L241402) (10 июня 2024)

