



Аналитическое описание упругих свойств коры нейтронных звёзд

Н.А. Земляков*, А.И. Чугунов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, 194021, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26

*zemlyakov@mail.ioffe.ru



Аннотация

Упругие свойства внешней слоёв (коры) играют важную роль в физике нейтронных звёзд. Они исследуются с 1990-х годов [1] как численными, так и полуаналитическими методами, требующими всё больших вычислительных мощностей [2]. В докладе показано, что, в действительности, многие результаты могут быть воспроизведены аналитически. Например, хорошо известное приближение Вигнера-Зейтца может быть обобщено для расчёта упругих свойств и позволяет вычислить эффективный модуль сдвига коры в приближении кулоновского кристалла с точностью до 4го знака [3]! Оно также позволяет полностью аналитически рассчитать поправки, связанные с электронным экранированием [4] и конечным размером атомных ядер [5], хорошо согласующиеся с более детальными расчётами [5, 6, 7]. Этот подход может быть обобщен на более глубокие слои нейтронных звёзд, так называемую «макаронную» фазу, где атомные ядра (нуклонные кластеры) могут приобретать форму цилиндров, и позволяет найти модуль поперечного сдвига [8]. Представленные в докладе результаты не только дают дополнительное понимание физики упругости коры, но и предлагают надёжный базис для экстраполяции имеющихся в литературе численных и полуаналитических расчётов.

1. Введение

Кора и мантия являются твёрдыми оболочками нейтронных звёзд, т.е. обладают упругими свойствами, которые необходимо учитывать для интерпретации наблюдательных данных [9]. Их можно рассчитывать численными и полуаналитическими методами. Как показано в докладе, использование упрощающих моделей позволяет исследовать упругие свойства аналитически, что, однако, даёт хорошее согласие с более точными расчётами.

2. Физическая модель

Для расчёта упругих модулей достаточно рассчитать разность энергий между деформированным и недеформированным состояниями. В данной работе использовалась модель сжимаемой жидкой капли в формулировке [10]. В результате наиболее трудоёмким оказывается расчёт кулоновской энергии. Именно с этим расчётом связано основное упрощение нашей модели: как для деформированного состояния, так и для недеформированного состояния мы используем приближение Вигнера-Зейтца, то есть заменяем истинную форму ячейки Вигнера-Зейтца (многогранник) на сглаженную. Это позволяет провести весь расчёт аналитически.

Далее будут использоваться следующие обозначения: u – доля ячейки Вигнера-Зейтца, занятая ядром (фактор заполнения), a – радиус ячейки Вигнера-Зейтца, V_c – её объём, Z – заряд ядра, R – радиус ядра, ρ_p – протонная плотность заряда внутри ядра.

3. Упругость внешней коры

Для внешней коры, где размеры ядер много меньше расстояния между ними, оправдано применять приближение точечных ядер и рассмотреть следующие модели:

I) Кулоновский кристалл (точечные ядра на однородном фоне электронов).

В приближении Вигнера-Зейтца модуль сдвига для кулоновского кристалла рассчитывается аналитически [3]:

$$\mu_{\text{Coul}}^V = \frac{3 Z^2 e^2}{25 a V_c} \quad (1)$$

Этот результат отличается от фойтовского усреднения точного упругого тензора объёмно(ОЦК)- и гранецентрированных (ГЦК) решёток лишь на 0.5%. Аналогичный ответ получается, когда ядра представляют собой сферы конечных размеров.

II) Кристалл с экранированием (точечные ядра на поляризуемом фоне электронов).

В приближении Вигнера-Зейтца модуль сдвига рассчитывается аналитически [4]

$$\mu_{\text{Yuk}}^V = \frac{3 Z^2 e^2}{25 a V_c} - 0.027 (k_{\text{TF}} a)^2 \frac{Z^2 e^2}{a V_c}, \quad (2)$$

где k_{TF} – волновое число Томаса-Ферми, описывающее экранирование электронами. Первое слагаемое совпадает с результатом для кулоновского кристалла, а второе описывает поправку на электронное экранирование и отличается от фойтовского усреднения поправок на экранирование в упругом тензоре ОЦК и ГЦК решёток лишь на 0.8%.

4. Упругость внутренней коры

Во внутренней коре необходимо учитывать размер и изменение формы ядер при деформации. Дело в том, что при деформации в окрестностях узлов решётки наводится квадрупольный потенциал $\varphi_{\text{def}} \propto \varepsilon$ (ε – параметр деформации кристалла) и сферическая форма ядра становится энергетически невыгодной.

Форма ядер в деформированном кристалле предполагается сфероидом с полуосями $R(1+\varepsilon_p)$ и $R/\sqrt{1+\varepsilon_p}$. Величина параметра деформации ядра ε_p определяется минимизацией полной энергии по этому параметру при заданном ε . В итоге,

$$\varepsilon_p = \frac{u}{2 - 4u^{1/3} + 3u} \varepsilon, \quad (3)$$

а модуль сдвига внутренней коры

$$\mu_{\text{WZ}}^V = \frac{3 Z^2 e^2}{25 a V_c} \left(1 - \frac{u^{5/3}}{2 - 4u^{1/3} + 3u} \right). \quad (4)$$

Здесь множитель в скобках – фактор подавления, зависящий только от фактора заполнения u .

В рамках модели сжимаемой жидкой капли можно отказаться от использования приближения Вигнера-Зейтца и представить кулоновскую энергию в деформированном и недеформированном состояниях в виде рядов по обратной решётке. В результате можно получить выражения для независимых упругих коэффициентов (для кубических решёток их три [11]) и рассчитать их [5]. Однако после фойтовского усреднения эффективный модуль упругости оказывается близким к приведенному выше аналитическому расчёту (рис. 1).

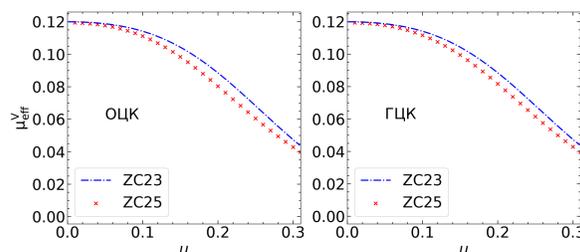


Рис. 1: Модуль сдвига глубоких слоёв коры μ как функция фактора заполнения u . Слева расчёты для ОЦК решётки, справа для ГЦК. 'ZC23' – формула (4), 'ZC25' – расчёты из [5].

5. Упругость мантии

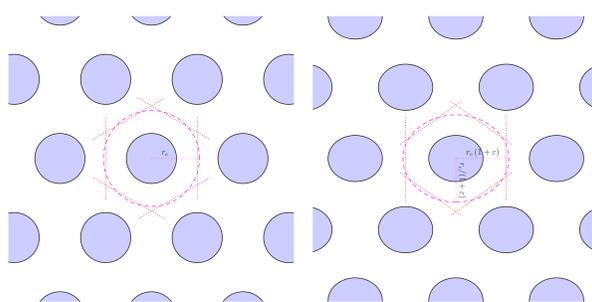


Рис. 2: Поперечное сечение решётки из цилиндрических кластеров (заполненные области) в фазе «спагетти» до (левая панель) и после (правая панель) поперечного сдвига. Пунктирные линии представляют собой точные границы ячейки Вигнера-Зейтца, штриховые линии – круговое/эллиптическое приближение ячейки. Изменение поперечного сечения кластера в результате сдвига схематически показано на правой панели.

Рассмотрение поперечного сдвига системы цилиндрических ядер (кластеров), упорядоченных в двумерную гексагональную решётку (см. рис. 2) можно провести аналогично расчёту для внутренней коры (в деформированной коре сечение ячеек и кластеров становится эллиптическим) [8].

Форма нуклонных кластеров после сдвига задаётся параметром

$$\varepsilon_p = \frac{2u}{7u - 5 - 3 \ln(u)} \varepsilon, \quad (5)$$

а модуль поперечного сдвига

$$C = \frac{\pi \rho_p^2 R^2 u}{4} \left(1 - \frac{2u^2}{7u - 5 - 3 \ln(u)} \right). \quad (6)$$

Множитель перед скобками соответствует расчёту модуля поперечного сдвига в приближении Вигнера-Зейтца с пренебрежением изменением формы кластеров. Он хорошо описывает результаты расчёта работы [12], в которой также пренебрегали изменением формы кластеров, но не использовали приближение Вигнера-Зейтца. Сравнение с результатами для гексагональной решётки без использования приближения Вигнера-Зейтца [13] представлены на рис. 3.

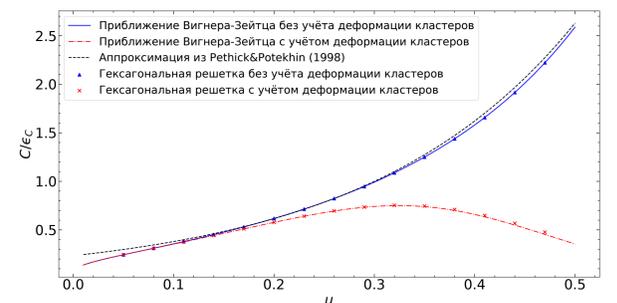


Рис. 3: Модуль поперечного сдвига фазы «спагетти» C , нормированный на плотность кулоновской энергии, как функция фактора заполнения u . Сплошная и штрихпунктирные линии воспроизводят формулу (6) без и с учётом деформации кластеров в приближении Вигнера-Зейтца, соответственно. Символы – расчёты без использования приближения Вигнера-Зейтца [13]. Штриховая линия – аппроксимационная формула из [12].

6. Выводы

Упругие свойства коры (и мантии) нейтронных звёзд рассчитаны аналитически с использованием приближения Вигнера-Зейтца. Как показано в докладе, точность этого приближения достаточно для приложенного (см. таблицу 1).

Модель	Погрешность
Кулоновский кристалл	~ 0.5%
Поправка на экранирование	~ 0.8%
Поправка на деформацию ядер	~ 10%
Фаза «спагетти»	~ 1%

Список литературы

- [1] S. Ogata and S. Ichimaru, *Physical Review A*, 1990, **42**, 4867–4870.
- [2] C.-J. Xia, T. Maruyama, N. Yasutake, T. Tatsumi and Y.-X. Zhang, *Physics Letters B*, 2023, **839**, 137769.
- [3] N. A. Zemlyakov and A. I. Chugunov, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2023, **518**, 3813–3819.
- [4] A. I. Chugunov, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2022, **517**, 4607–4611.
- [5] N. A. Zemlyakov and A. I. Chugunov, *submitted in Physical Review D*, 2025.
- [6] A. A. Kozhberov, *Physics of Plasmas*, 2022, **29**, 043701.
- [7] D. A. Baiko, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2011, **416**, 22–31.
- [8] N. A. Zemlyakov and A. I. Chugunov, *Universe*, 2023, **9**, 220.
- [9] N. Chamel and P. Haensel, *Living Reviews in Relativity*, 2008, **11**, 10.
- [10] M. E. Gusakov and A. I. Chugunov, *Physical Review Letters*, 2020, **124**, 191101.
- [11] L. Landau, E. Lifshitz, A. Kosevich and L. Pitaevskii, *Theory of Elasticity*, Butterworth-Heinemann, 1986.
- [12] C. Pethick and A. Potekhin, *Physics Letters B*, 1998, **427**, 7–12.
- [13] N. A. Zemlyakov and A. I. Chugunov, *to be submitted*, 2026.