Резонансы в фотоннокристаллических слоях: фундаментальные основы и применения

Сергей Дьяков

Natalia Salakhova
phd student

Ilia Smagin
phd student

Ilia Fradkin
research scientist

Sergey Dyakov
associate professor

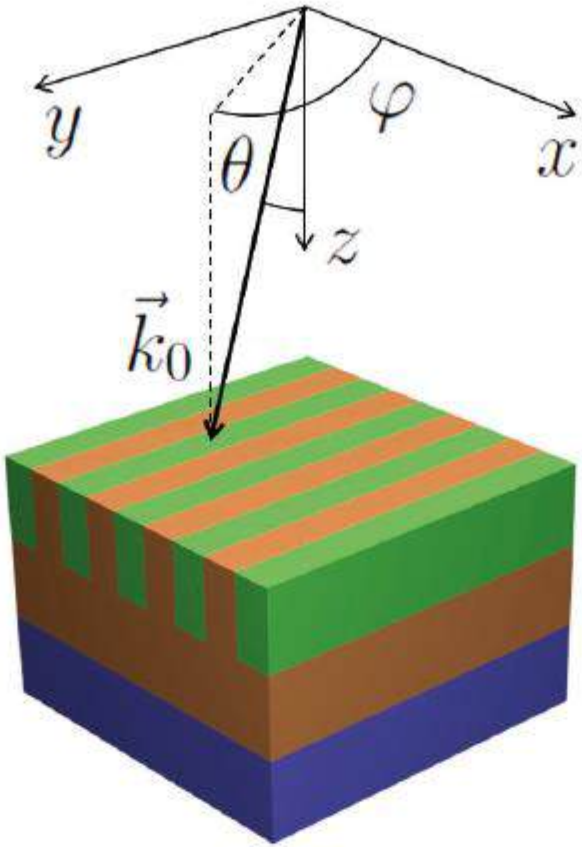
Nikolay Gippius
professor

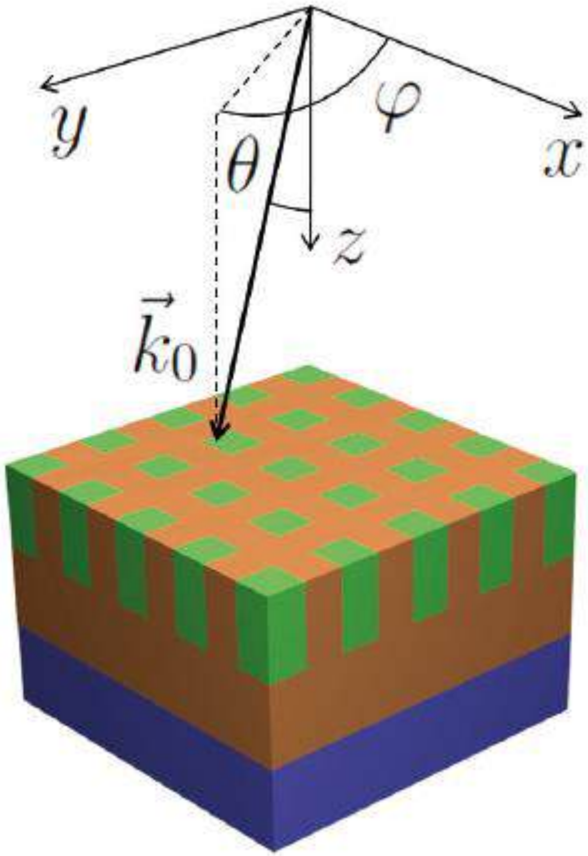
Skoltech

Группа теоретической нанофотоники

Часть 1
Фурье-модальный метод

Фурье-модальный метод





Уравнения Максвелла

бесконечно толстый слой с бесконечным числом периодов

$$\nabla\times\boxed{\vec{H}(\vec{r},t)}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)$$

$$\nabla\times\boxed{\vec{E}(\vec{r},t)}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}=0$$

$$\nabla\vec{B}(\vec{r},t)=0$$

$$\nabla\vec{D}(\vec{r},t)=4\pi\varrho(\vec{r},t)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(\vec{r},\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\vec{D}(\vec{r},\omega)=\hat{\varepsilon}(\vec{r},\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega)$$

$$\vec{B}(\vec{r},\omega)=\hat{\mu}(\vec{r},\omega)\vec{H}(\vec{r},\omega)$$

$$\nabla\times\boxed{\vec{E}(\vec{r},\omega)}=+ik_0\mu\vec{H}(\vec{r},\omega)$$

$$\nabla\times\boxed{\vec{H}(\vec{r},\omega)}=-ik_0\varepsilon\vec{E}(\vec{r},\omega)+\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},\omega)$$

Вид решений уравнений Максвелла в периодическом слое

бесконечно толстый слой с бесконечным числом периодов

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r},\omega) = +ik_0\mu\vec{H}(\vec{r},\omega)$$
$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r},\omega) = -ik_0\varepsilon\vec{E}(\vec{r},\omega) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},\omega).$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{\rho} + m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2) = \varepsilon(\boldsymbol{\rho})$$
$$\mu(\boldsymbol{\rho} + m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2) = \mu(\boldsymbol{\rho})$$

Теорема Блоха:

$$E_\alpha(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) = \tilde{E}_\alpha(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)e^{i\boldsymbol{\kappa\rho}}$$
$$H_\alpha(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) = \tilde{H}_\alpha(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)e^{i\boldsymbol{\kappa\rho}}$$

периодические функции

плоская волна

$$E_\alpha(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) = \sum_\gamma \mathrm{E}_{\alpha\gamma}(z, \omega)e^{i(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{g}_\gamma)\boldsymbol{\rho}},$$
$$H_\alpha(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) = \sum_\gamma \mathrm{H}_{\alpha\gamma}(z, \omega)e^{i(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{g}_\gamma)\boldsymbol{\rho}},$$

набор бесконечного числа фурье-компонент

$$\boldsymbol{g}_\gamma = [g_x^{(\gamma)}, g_y^{(\gamma)}]$$

γ-тая гармоника

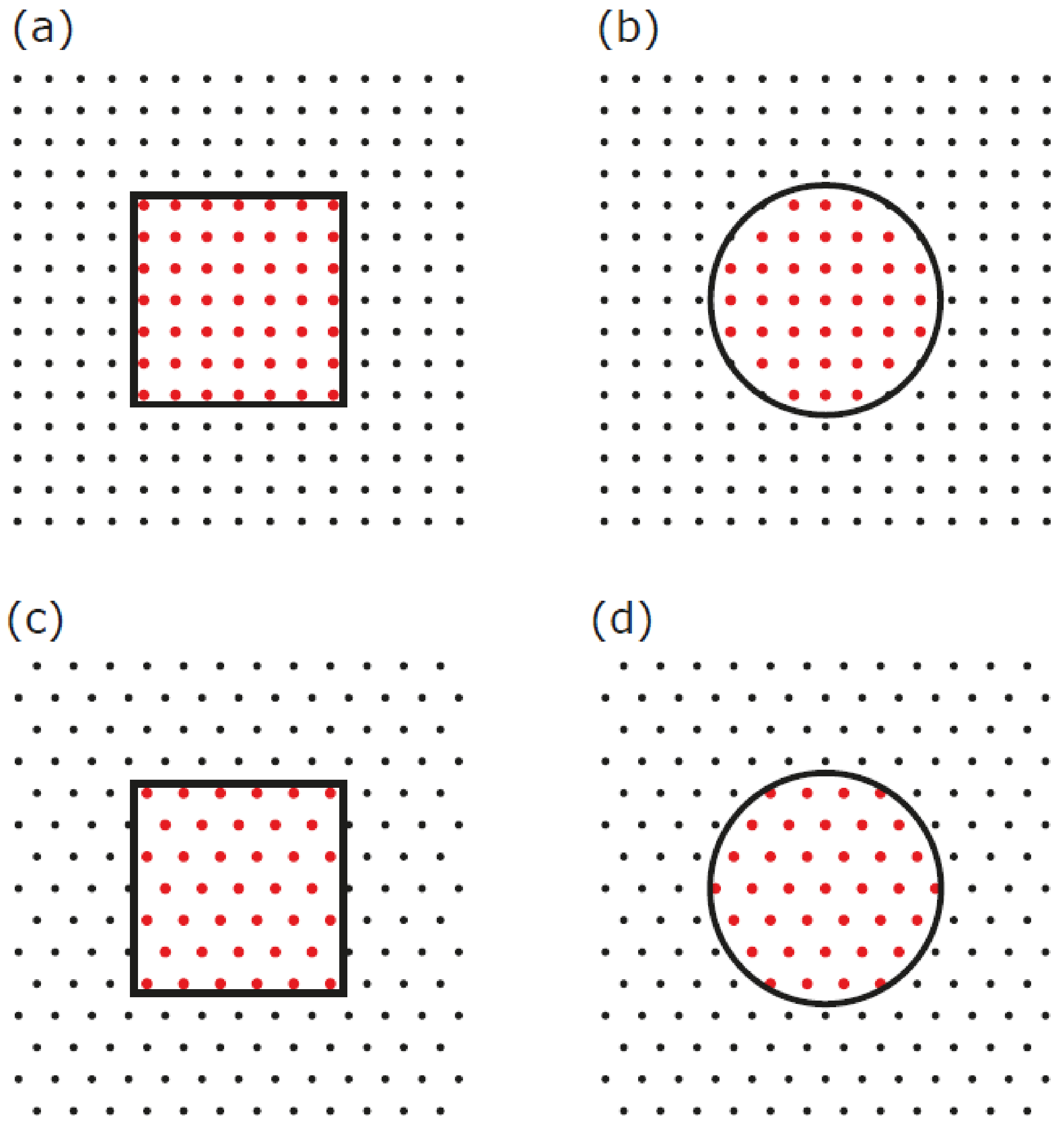
Гармоники в пространстве волновых векторов

Базисные вектора обратной решетки в К-пространстве

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{2\pi \mathrm{R}\boldsymbol{a}_2}{(\boldsymbol{a}_1 \cdot \mathrm{R}\boldsymbol{a}_2)}, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \frac{2\pi \mathrm{R}\boldsymbol{a}_1}{(\boldsymbol{a}_2 \cdot \mathrm{R}\boldsymbol{a}_1)},$$

R – матрица поворота на угол 90^o

для практических расчетов выбирается конечное число гармоник



Уравнения Максвелла в периодическом слое

бесконечно толстый слой с бесконечным числом периодов

$$-i\frac{d}{dz}\mathrm{F}(z)=\mathbb{C}\mathrm{F}(z)-i\mathrm{J}(z)$$

Будем искать решение в виде распространяющихся плоских волн: $\mathrm{F}(z)=\mathrm{F}e^{ik_z z}$

Задача на собственные значения $\boxed{\mathbb{C}\mathrm{F}=k_z\mathrm{F}}$

$$\mathbb{C}_{11}=k_0\begin{bmatrix}-\tilde{\mu}_{23}K_y-K_x\tilde{\varepsilon}_{31} & +\tilde{\mu}_{23}K_x-K_x\tilde{\varepsilon}_{32}\\ +\tilde{\mu}_{13}K_y-K_y\tilde{\varepsilon}_{31} & -\tilde{\mu}_{13}K_x-K_y\tilde{\varepsilon}_{32}\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}_{12}=k_0\begin{bmatrix}+\tilde{\mu}_{21}+K_x\tilde{\varepsilon}_{33}K_y & +\tilde{\mu}_{22}-K_x\tilde{\varepsilon}_{33}K_x\\ -\tilde{\mu}_{11}+K_y\tilde{\varepsilon}_{33}K_y & -\tilde{\mu}_{12}-K_y\tilde{\varepsilon}_{33}K_x\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}_{21}=k_0\begin{bmatrix}-\tilde{\varepsilon}_{21}-K_x\tilde{\mu}_{33}K_y & -\tilde{\varepsilon}_{22}+K_x\tilde{\mu}_{33}K_x\\ +\tilde{\varepsilon}_{11}-K_y\tilde{\mu}_{33}K_y & +\tilde{\varepsilon}_{12}+K_y\tilde{\mu}_{33}K_x\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}_{22}=k_0\begin{bmatrix}-\tilde{\varepsilon}_{23}K_y-K_x\tilde{\mu}_{31} & +\tilde{\varepsilon}_{23}K_x-K_x\tilde{\mu}_{32}\\ +\tilde{\varepsilon}_{13}K_y-K_y\tilde{\mu}_{31} & -\tilde{\varepsilon}_{13}K_x-K_y\tilde{\mu}_{32}\end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{F}(z)=\begin{bmatrix}\mathrm{E}_x(z)\\ \mathrm{E}_y(z)\\ \mathrm{H}_x(z)\\ \mathrm{H}_y(z)\end{bmatrix},\qquad \mathrm{J}(z)=\begin{bmatrix}-K_x\tilde{\varepsilon}^{33}\mathrm{J}_z(z)\\ -K_y\tilde{\varepsilon}^{33}\mathrm{J}_z(z)\\ -i\mathrm{J}_\mathrm{y}(z)+i\tilde{\varepsilon}^{23}\mathrm{J}_z(z)\\ +i\mathrm{J}_\mathrm{x}(z)-i\tilde{\varepsilon}^{13}\mathrm{J}_z(z)\end{bmatrix}$$

Вектор Фурье-компонент полей

Вектор Фурье-компонент тока

Уравнения Максвелла в периодическом слое

бесконечно толстый слой с бесконечным числом периодов

$$-i\frac{d}{dz}\mathrm{F}(z) = \mathbb{C}\mathrm{F}(z) - i\mathrm{J}(z)$$

Будем искать решение в виде распространяющихся плоских волн: $\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}e^{ik_z z}$

Задача на собственные значения $\boxed{\mathbb{C}\mathrm{F} = k_z\mathrm{F}}$

$$\mathbb{C}_{11} = k_0 \begin{bmatrix} -\tilde{\mu}_{23}K_y - K_x\tilde{\varepsilon}_{31} & +\tilde{\mu}_{23}K_x - K_x\tilde{\varepsilon}_{32} \\ +\tilde{\mu}_{13}K_y - K_y\tilde{\varepsilon}_{31} & -\tilde{\mu}_{13}K_x - K_y\tilde{\varepsilon}_{32} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}_{12} = k_0 \begin{bmatrix} +\tilde{\mu}_{21} + K_x\tilde{\varepsilon}_{33}K_y & +\tilde{\mu}_{22} - K_x\tilde{\varepsilon}_{33}K_x \\ -\tilde{\mu}_{11} + K_y\tilde{\varepsilon}_{33}K_y & -\tilde{\mu}_{12} - K_y\tilde{\varepsilon}_{33}K_x \end{bmatrix}$$

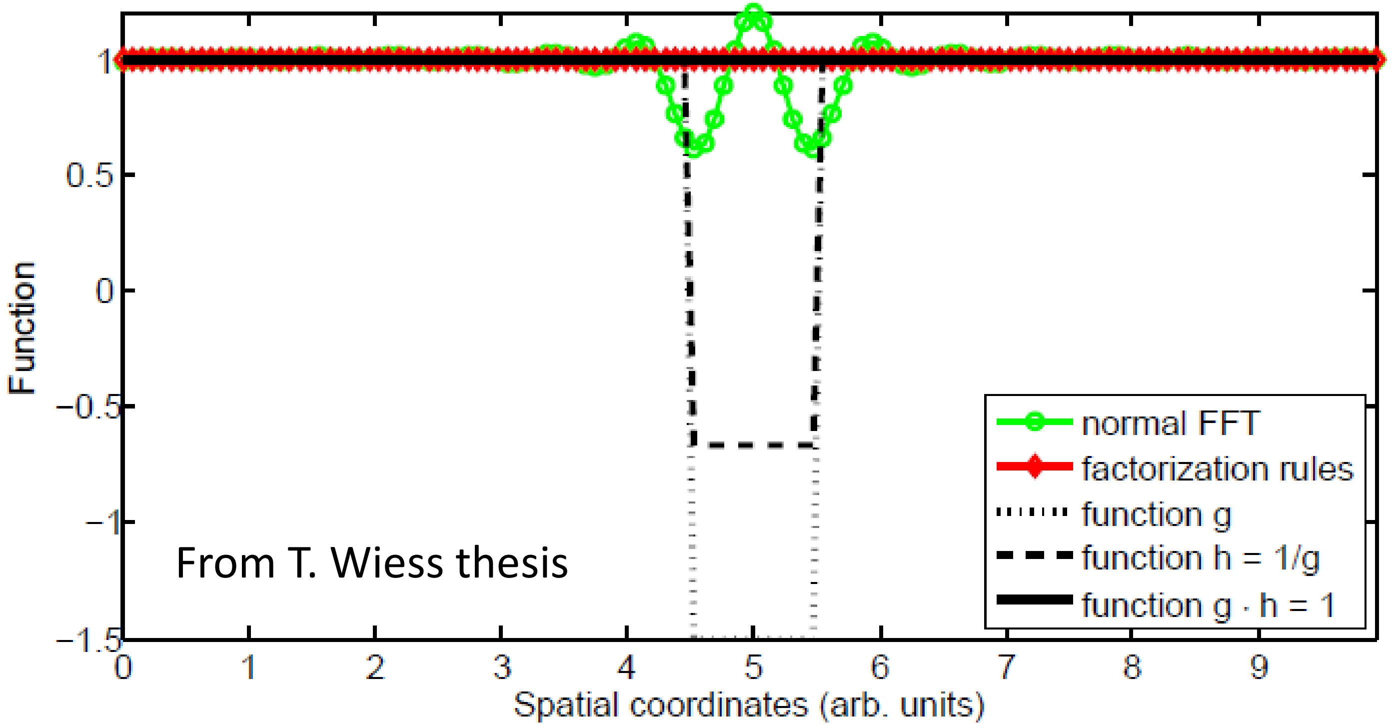
$$\mathbb{C}_{21} = k_0 \begin{bmatrix} -\tilde{\varepsilon}_{21} - K_x\tilde{\mu}_{33}K_y & -\tilde{\varepsilon}_{22} + K_x\tilde{\mu}_{33}K_x \\ +\tilde{\varepsilon}_{11} - K_y\tilde{\mu}_{33}K_y & +\tilde{\varepsilon}_{12} + K_y\tilde{\mu}_{33}K_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}_{22} = k_0 \begin{bmatrix} -\tilde{\varepsilon}_{23}K_y - K_x\tilde{\mu}_{31} & +\tilde{\varepsilon}_{23}K_x - K_x\tilde{\mu}_{32} \\ +\tilde{\varepsilon}_{13}K_y - K_y\tilde{\mu}_{31} & -\tilde{\varepsilon}_{13}K_x - K_y\tilde{\mu}_{32} \end{bmatrix}.$$

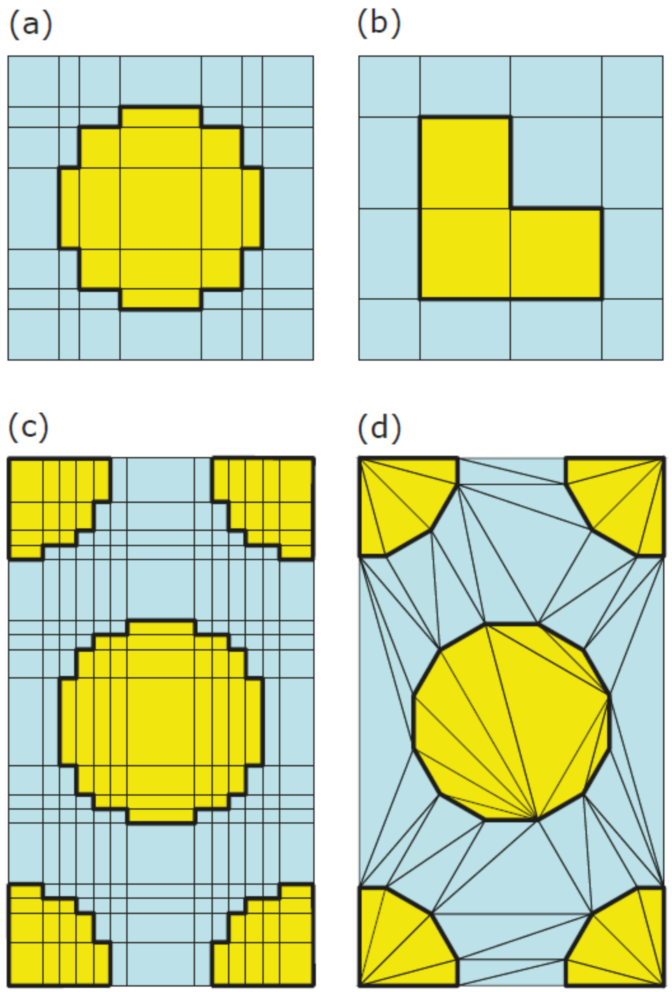
$$K_x = \frac{1}{k_0}\begin{bmatrix} k_x + g_x^{(1)} & 0 & \cdots \\ 0 & k_x + g_x^{(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

диагональная матрица проекций волныывых векторов гармоник

Фурье-разложение диэлектрической функции



Для улучшения сходимости необходимо использовать правила факторизации.



разбиение слоя на элементарные фигуры

Общее решение задачи на собственные значения

бесконечно толстый слой с бесконечным числом периодов

Задача на собственные значения $\boxed{\mathbb{C}\mathrm{F} = k_z \mathrm{F}}$

Общее решение задачи на собственные значения

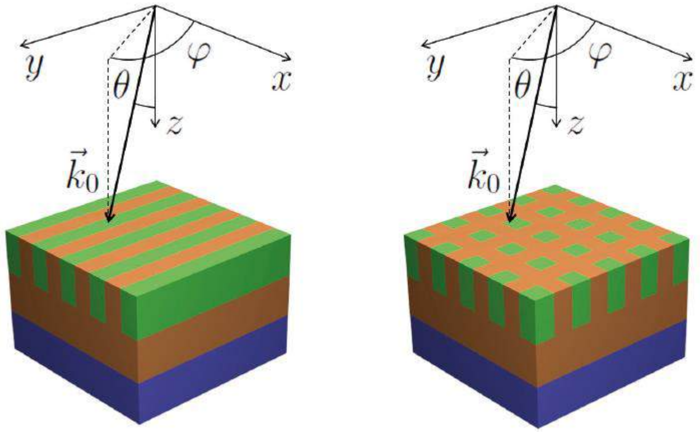
$$\mathrm{F}(z) = \mathbb{F}\mathrm{A}(z) \equiv \mathbb{F}\boxed{\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}(z) \\ \vec{\mathrm{u}}(z) \end{bmatrix}}$$

вектор амплитуд

- Собственные векторы оператора $\mathbb{C}$ могут соответствовать решениям, распространяющимся в положительном и отрицательном z-направлении
- Матрица $\mathbb{F}$ называется материальной матрицей и состоит из собственных векторов оператора $\mathbb{C}$

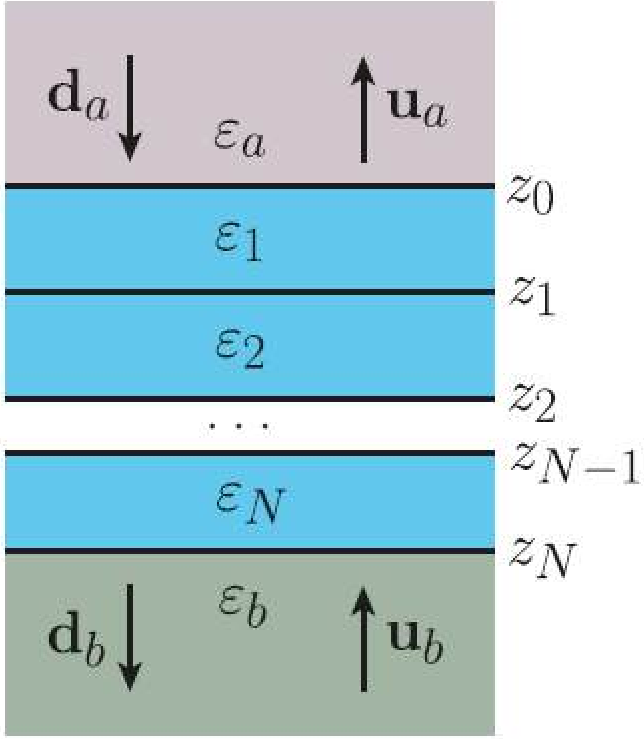
$$\mathbb{F} \equiv [\mathrm{F}_1 \ \mathrm{F}_2 \ \mathrm{F}_3 \ \cdots]$$

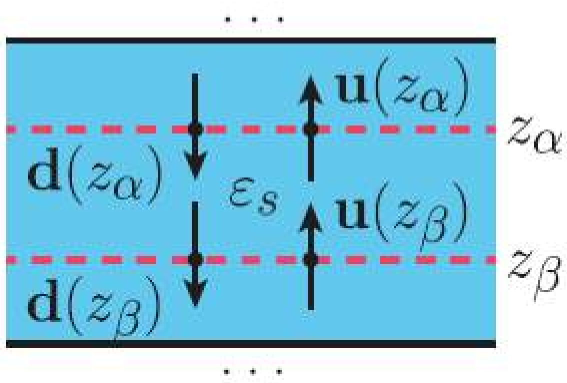
- Конкретное частное решение определяется граничными условиями



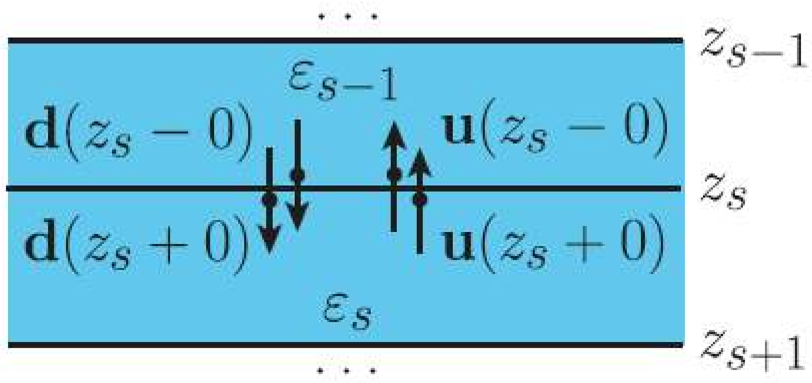
Связь решений задачи на собственные значения

$$\mathrm{A}(z_1) = \mathbb{T}(z_1, z_2)\mathrm{A}(z_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}(z_2) \\ \vec{\mathrm{u}}(z_2) \end{bmatrix} = \mathbb{T}(z_1, z_2) \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}(z_1) \\ \vec{\mathrm{u}}(z_1) \end{bmatrix}$$



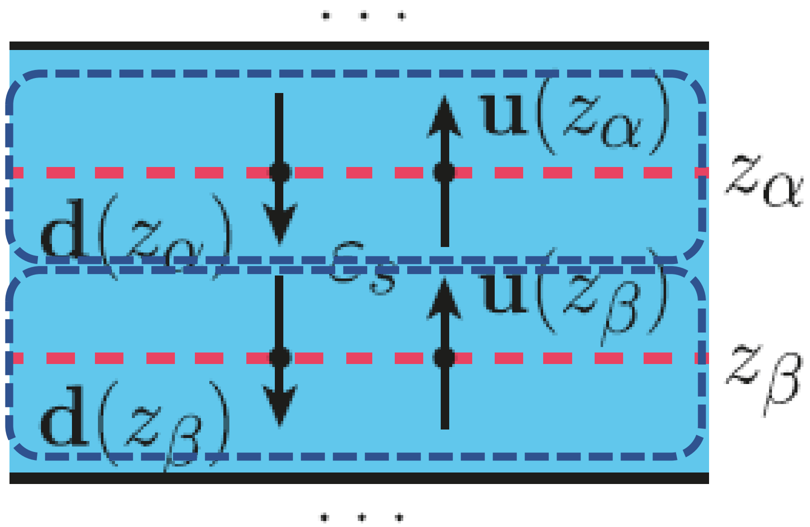


прохождение через слой



прохождение через интерфейс

Прохождение через слой: матрица переноса



$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}(z_2) \\ \vec{\mathrm{u}}(z_2) \end{bmatrix} = \mathbb{T}(z_1, z_2) \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}(z_1) \\ \vec{\mathrm{u}}(z_1) \end{bmatrix}$$

матрица переноса при прохождении через слой

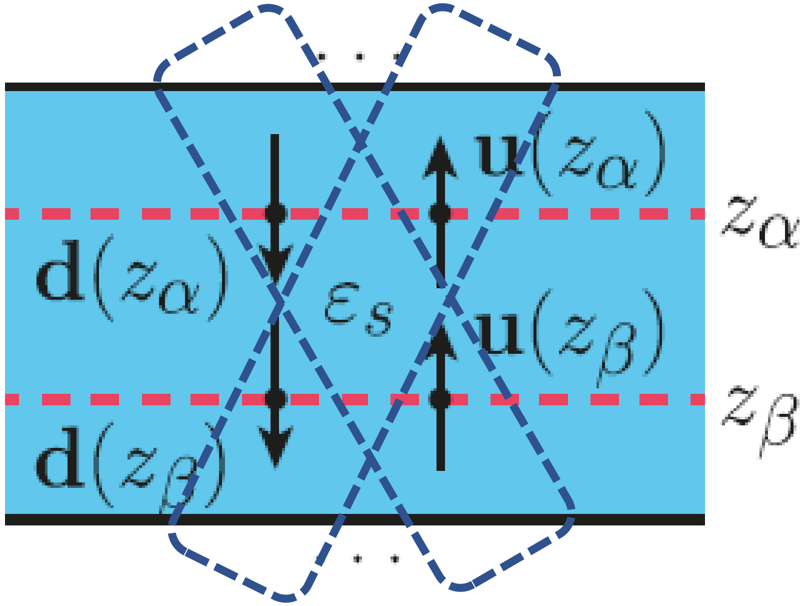
$$\mathbb{T}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} e^{iK_z^s(z_2 - z_1)} & 0 \\ 0 & e^{-iK_z^s(z_2 - z_1)} \end{bmatrix}$$

в поглощающих слоях

$$k_z = k_z' + ik_z''$$

схема численно нестабильна

Прохождение через слой: матрица рассеяния



$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}(z_2) \\ \vec{\mathrm{u}}(z_1) \end{bmatrix} = \mathbb{S}(z_1, z_2) \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}(z_1) \\ \vec{\mathrm{u}}(z_2) \end{bmatrix}$$

матрица рассеяния при прохождении через слой

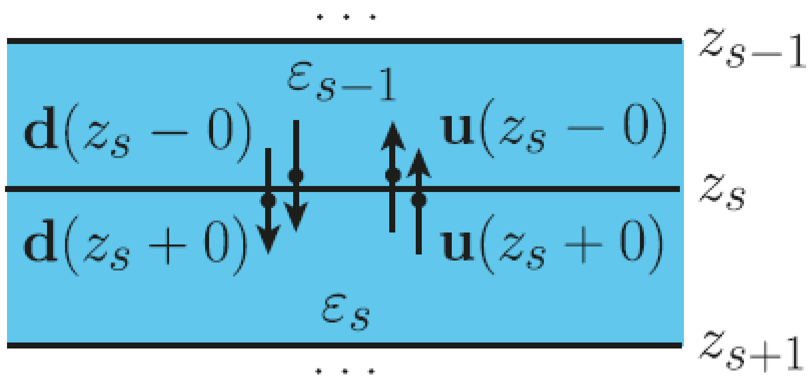
$$\mathbb{S}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} e^{iK_z^s(z_2 - z_1)} & 0 \\ 0 & e^{iK_z^s(z_2 - z_1)} \end{bmatrix}$$

в поглощающих слоях

$$k_z = k_z' + ik_z''$$

схема численно стабильна

Прохождение через интерфейс



Непрерывность тангенциальных компонент Фурье-компонент полей на границе раздела

$$\mathrm{F}(z_0 - 0) = \mathrm{F}(z_0 + 0)$$

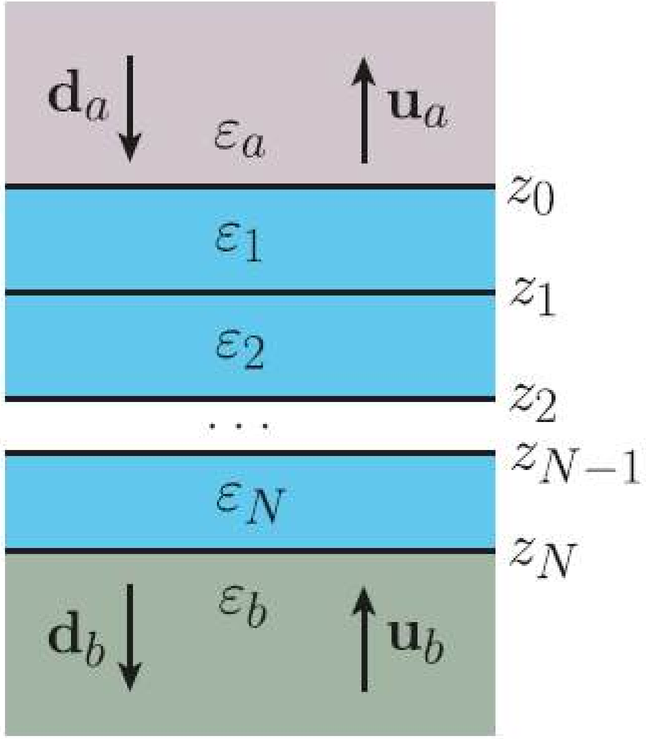
$$\mathbb{F}_{j-1}\mathrm{A}(z_0 - 0) = \mathbb{F}_j\mathrm{A}(z_0 + 0)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}(z_0 + 0) \\ \vec{\mathrm{u}}(z_0 + 0) \end{bmatrix} = \boxed{\mathbb{F}_j^{-1}\mathbb{F}_{j-1}} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}(z_0 - 0) \\ \vec{\mathrm{u}}(z_0 - 0) \end{bmatrix}$$

матрица прохождения через интерфейс в формализме оператора переноса

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} \mathbb{S}_{11} & \mathbb{S}_{12} \\ \mathbb{S}_{21} & \mathbb{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{T}_{11} - \mathbb{T}_{12}\mathbb{T}_{22}^{-1}\mathbb{T}_{21} & \mathbb{T}_{12}\mathbb{T}_{22}^{-1} \\ \mathbb{T}_{22}^{-1}\mathbb{T}_{21} & \mathbb{T}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Полная матрица рассеяния



$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_b \\ \vec{\mathrm{u}}_a \end{bmatrix} = \mathbb{S}_{\mathrm{tot}} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_a \\ \vec{\mathrm{u}}_b \end{bmatrix}$$

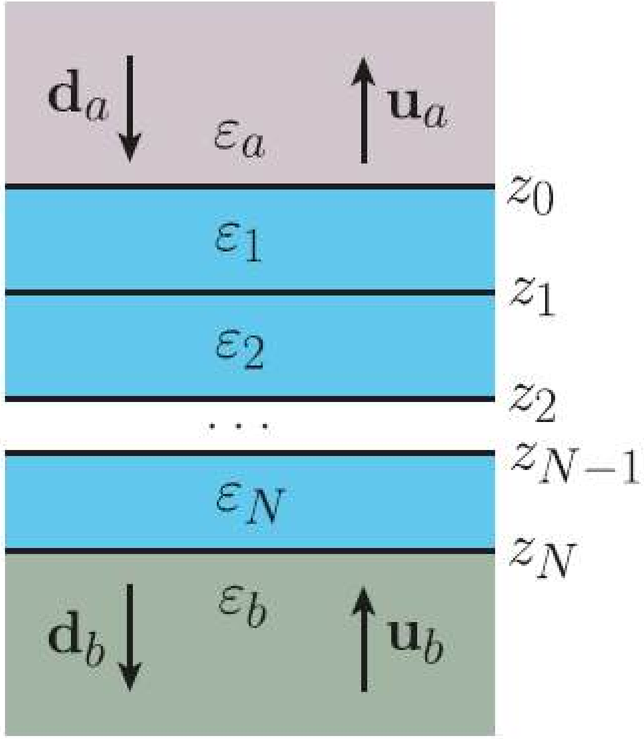
$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}(z_N + 0) \\ \vec{\mathrm{u}}(z_0 - 0) \end{bmatrix} = \mathbb{S}(z_0 - 0, z_N + 0) \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}(z_0 - 0) \\ \vec{\mathrm{u}}(z_N + 0) \end{bmatrix}$$

Полная матрица рассеяния

- учитывает многократное отражение плоских волн от границ раздела слоев, набег фазы на толщинах слоев и непрерывность тангенциальных компонент полей.

- находится при помощи итерационной процедуры

Расчет полной матрицы рассеяния



$$\mathbb{S}(0-0,0-0)=\mathcal{I}$$

Вводя обозначение

$$\mathbb{I}_{s-1,s} \equiv \mathbb{S}(z_s-0, z_s+0)$$
$$\mathbb{P}_s \equiv \mathbb{S}(z_{s-1}+0, z_s-0),$$

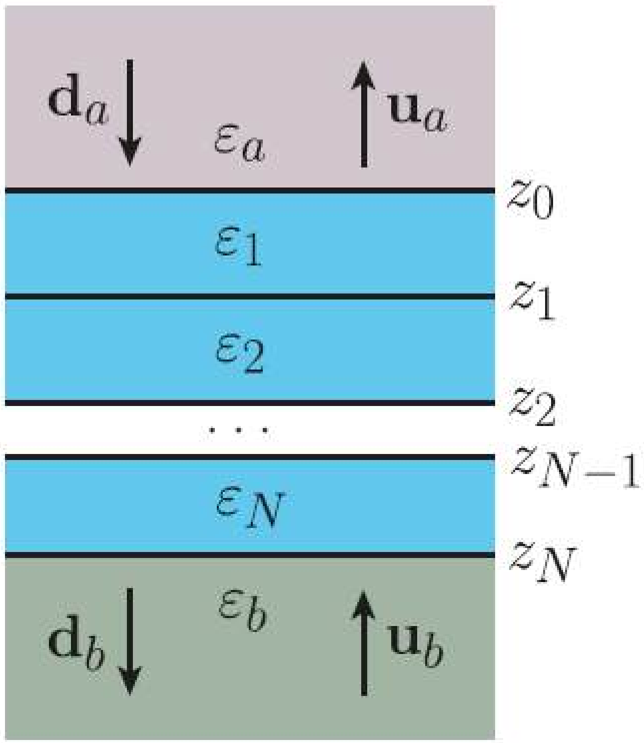
получим компактное выражение для полной матрицы рассеяния:

$$\mathbb{S}_{\text{tot}} = \mathbb{I}_{\text{a1}} \otimes \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{I}_{12} \otimes \mathbb{P}_{12} \cdots \mathbb{P}_{\text{N}-1,\text{N}} \otimes \mathbb{I}_{\text{Nb}},$$

где оператор $\otimes$ обозначает объединение двух матриц рассеяния, который определяется следующим образом:

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^a \otimes \mathbb{S}^b = \begin{bmatrix} \mathbb{S}^b_{11}\left(\mathcal{I}-\mathbb{S}^a_{12}\mathbb{S}^b_{21}\right)^{-1}\mathbb{S}^a_{11} & \mathbb{S}^b_{12}+\mathbb{S}^b_{11}\left(\mathcal{I}-\mathbb{S}^a_{12}\mathbb{S}^b_{21}\right)^{-1}\mathbb{S}^a_{12}\mathbb{S}^b_{22} \\ \mathbb{S}^a_{21}+\mathbb{S}^a_{22}\left(\mathcal{I}-\mathbb{S}^b_{21}\mathbb{S}^a_{12}\right)^{-1}\mathbb{S}^b_{21}\mathbb{S}^a_{11} & \mathbb{S}^a_{22}\left(\mathcal{I}-\mathbb{S}^b_{21}\mathbb{S}^a_{12}\right)^{-1}\mathbb{S}^b_{22} \end{bmatrix}$$

Расчет коэффицентов отражения, пропускания и поглощения



$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_b \\ \vec{\mathrm{u}}_a \end{bmatrix} = \mathbb{S}(z_1, z_2) \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_a \\ \vec{\mathrm{o}} \end{bmatrix}$$

Падающий вектор амплитуд

$$\vec{\mathrm{d}}_a = \mathbb{F}_a^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{P}_x \\ 0 \\ \vdots \\ \mathrm{P}_y \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Отраженный и прошедший вектора Фурье-компонент

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E}_x \\ \mathrm{E}_y \\ \mathrm{H}_x \\ \mathrm{H}_y \end{bmatrix}_{\mathrm{ref}} = \mathbb{F}_a \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{o}} \\ \vec{\mathrm{u}}_a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E}_x \\ \mathrm{E}_y \\ \mathrm{H}_x \\ \mathrm{H}_y \end{bmatrix}_{\mathrm{trans}} = \mathbb{F}_b \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_b \\ \vec{\mathrm{o}} \end{bmatrix}$$

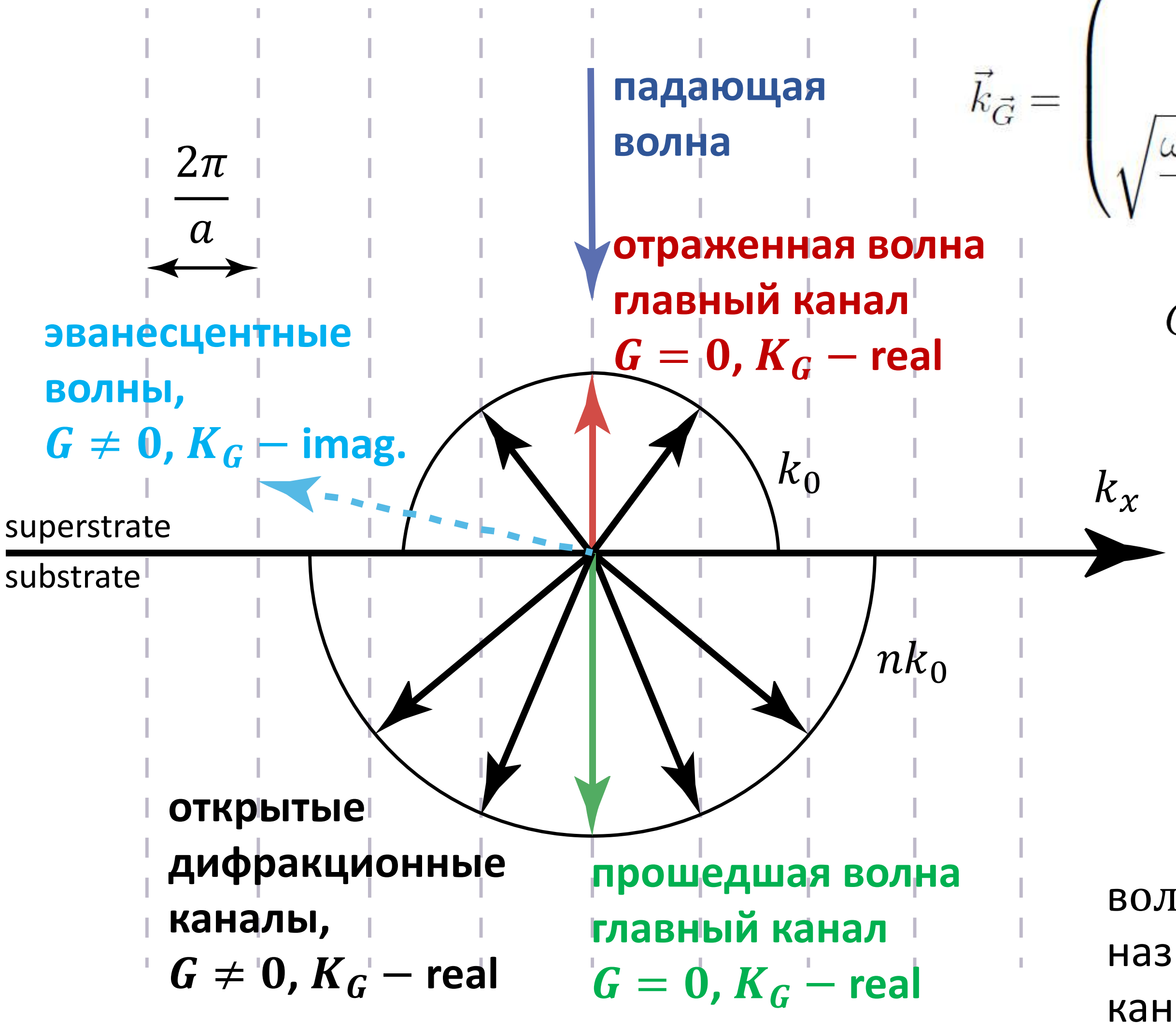
$$R = -\frac{\mathrm{S}_z^{\mathrm{ref}}}{\mathrm{S}_z^{\mathrm{inc}}},$$

$$T = \frac{\mathrm{S}_z^{\mathrm{trans}}}{\mathrm{S}_z^{\mathrm{inc}}},$$

$$\mathrm{S}_z \equiv \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re} \left(\left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right] \right)_z$$

$$= \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re} \left(\mathrm{E}_x^\dagger \mathrm{H}_y + \mathrm{E}_x \mathrm{H}_y^\dagger \right.$$
$$\left. - \mathrm{E}_y^\dagger \mathrm{H}_x - \mathrm{E}_y \mathrm{H}_x^\dagger \right)$$

Каналы дифракции

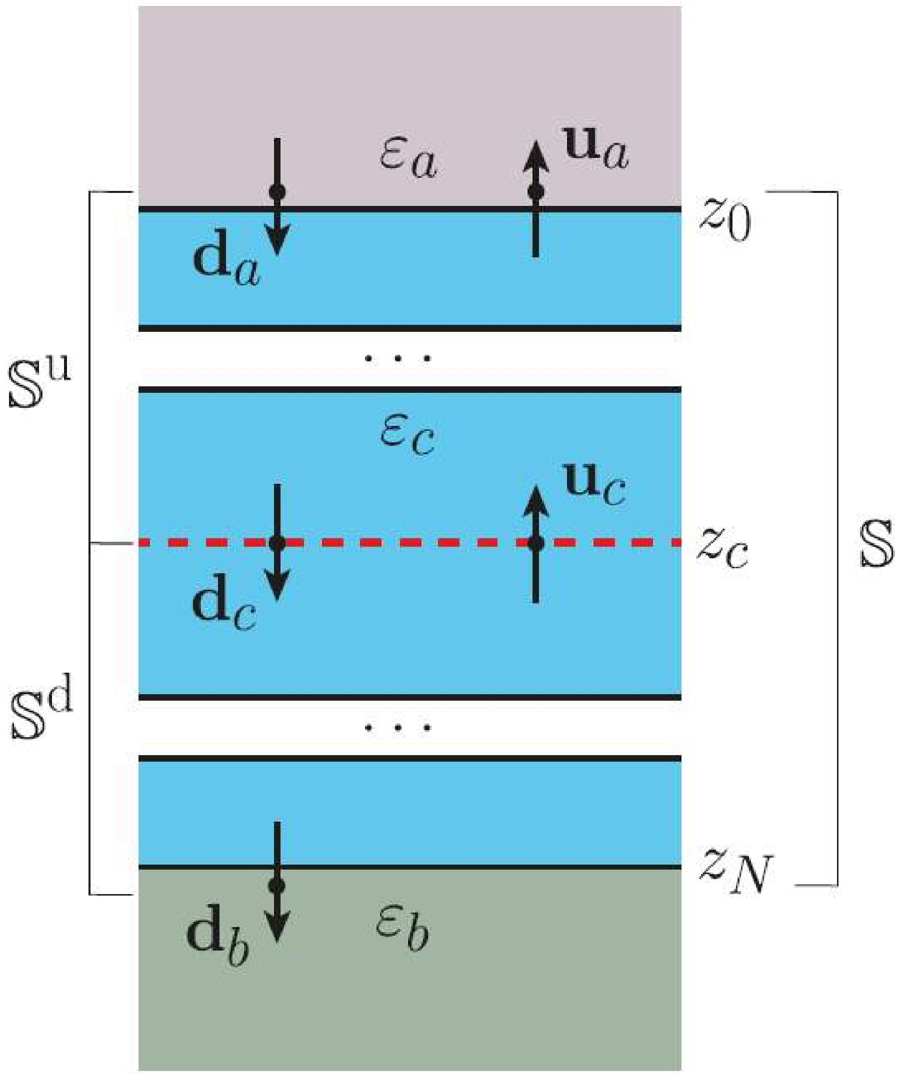


$$\vec{k}_{\vec{G}} = \begin{pmatrix} k_x + G_x \\ k_y + G_y \\ \sqrt{\frac{\omega^2 \varepsilon_a}{c^2} - (k_x + G_x)^2 - (k_y + G_y)^2} \end{pmatrix}$$

$$G_x = \frac{2\pi}{a_x} m_x \quad G_y = \frac{2\pi}{a_y} m_y$$

волны с реальной $\boldsymbol{K_G}$ называются открытыми каналами

Расчет распределения электромагнитного поля

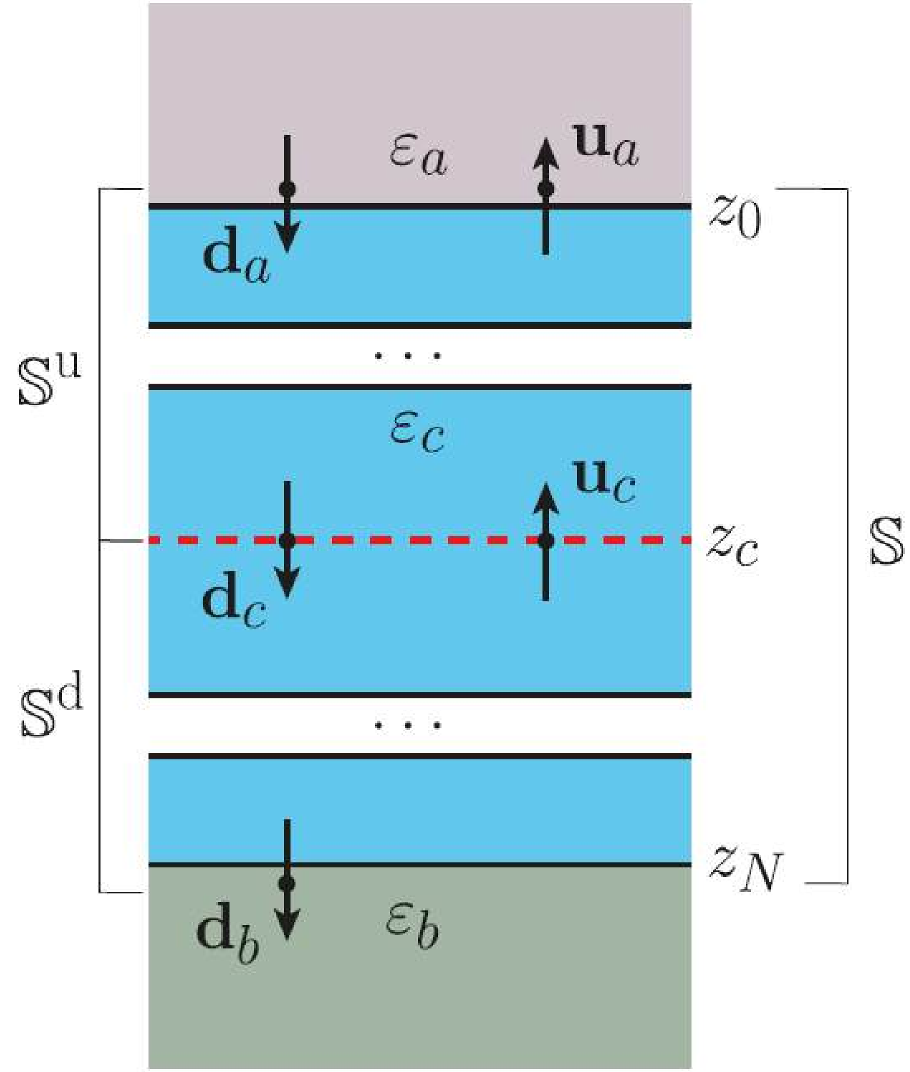


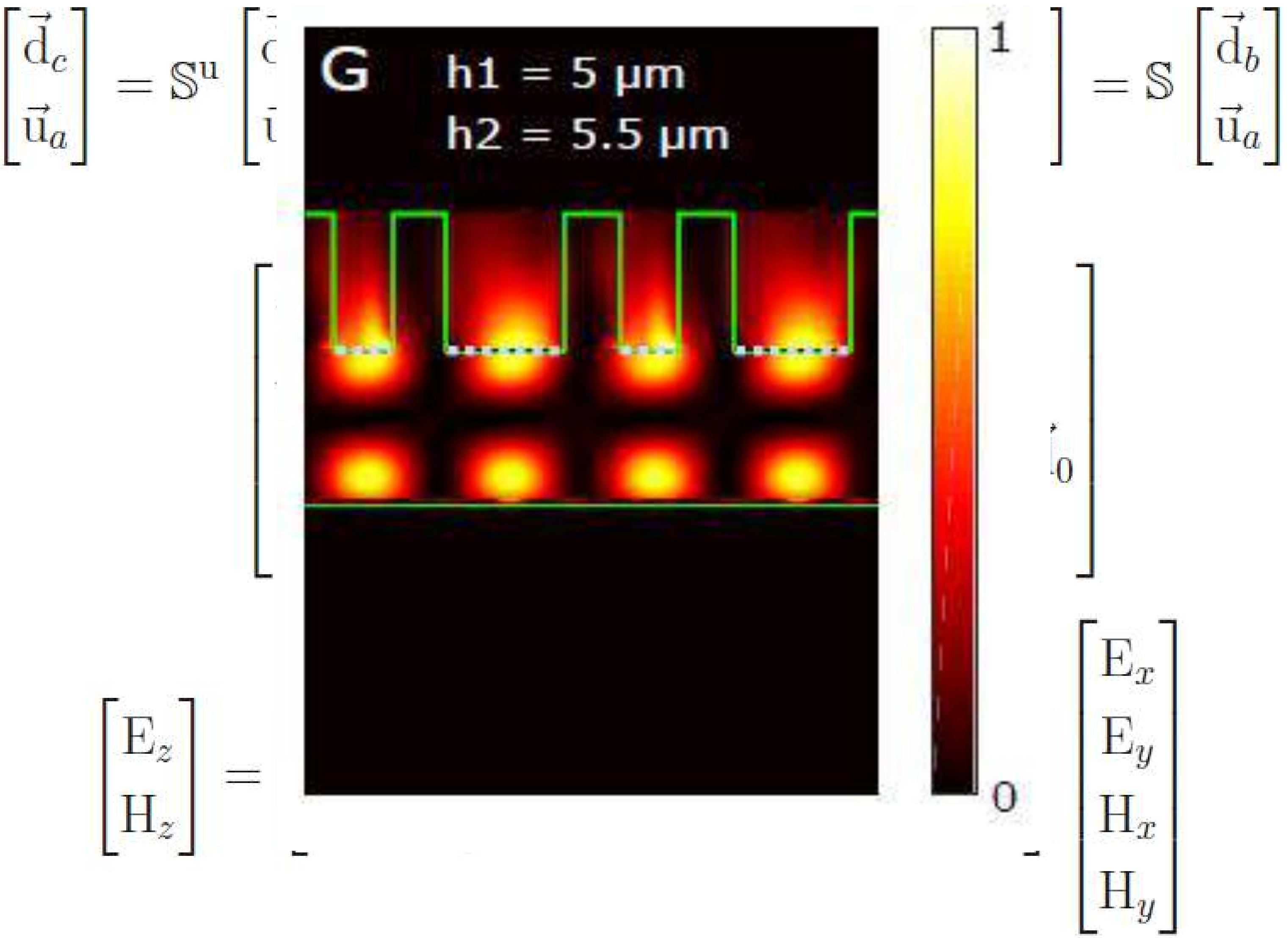
$$\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{d}}_c\\ \vec{\mathrm{u}}_a\end{bmatrix} = \mathbb{S}^{\mathrm{u}}\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{d}}_a\\ \vec{\mathrm{u}}_c\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\vec{\mathrm{d}}_b\\ \vec{\mathrm{u}}_c\end{bmatrix} = \mathbb{S}^{\mathrm{d}}\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{d}}_c\\ \vec{\mathrm{u}}_b\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\vec{\mathrm{d}}_a\\ \vec{\mathrm{u}}_b\end{bmatrix} = \mathbb{S}\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{d}}_b\\ \vec{\mathrm{u}}_a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-\mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21} & \mathcal{I}\\ +\mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{11} & \mathcal{O}\\ \mathcal{O} & +\mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{22}\\ \mathcal{I} & -\mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{d}}_c\\ \vec{\mathrm{u}}_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{\mathrm{o}}\\ \mathbb{S}_{11}\vec{\mathrm{d}}_0\\ (\mathbb{S}_{21} - \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{21})\,\vec{\mathrm{d}}_0\\ \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{11}\vec{\mathrm{d}}_0\end{bmatrix}$$

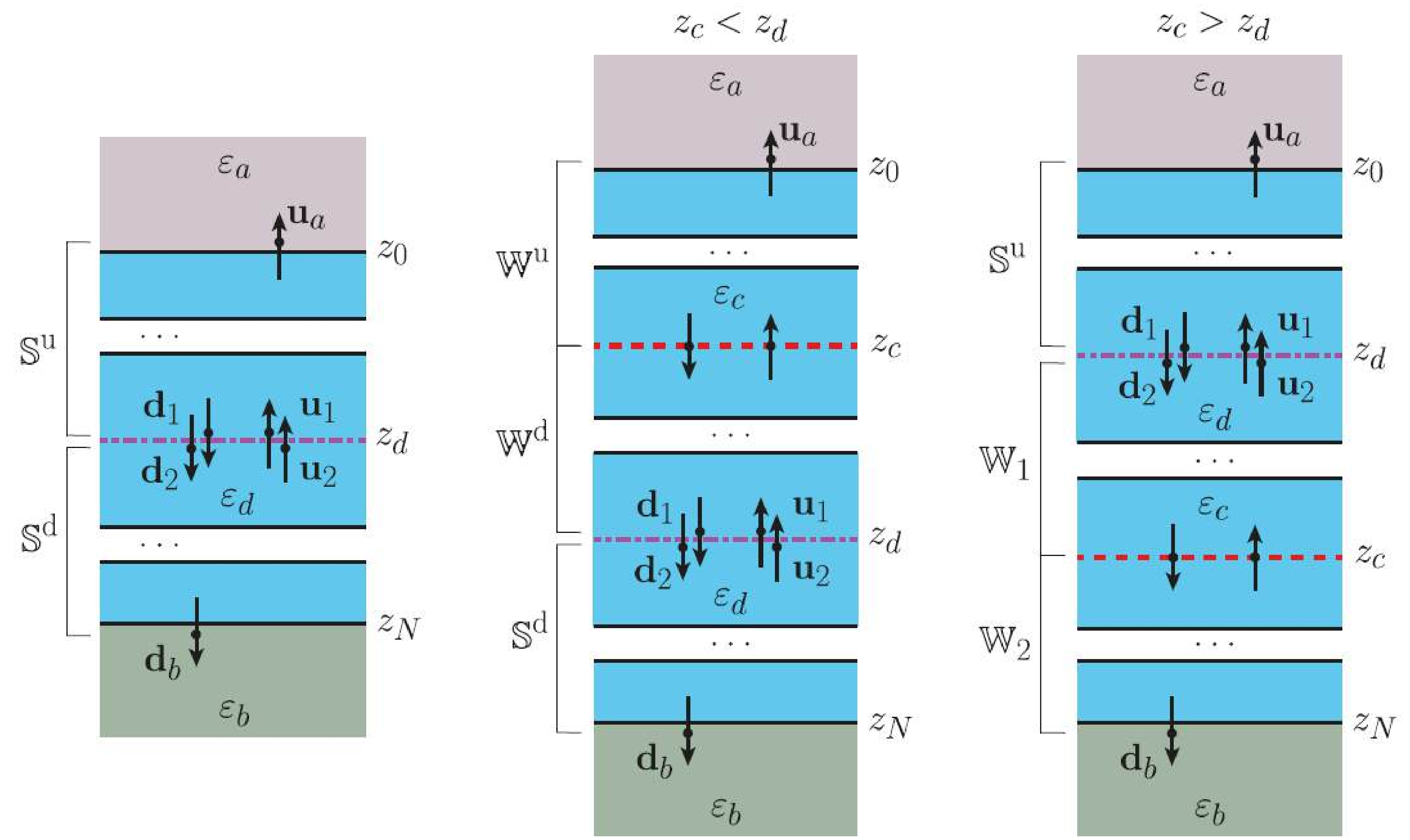
$$\begin{bmatrix}\mathrm{E}_z\\ \mathrm{H}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\tilde{\varepsilon}_{31} & -\tilde{\varepsilon}_{32} & \tilde{\varepsilon}_{33}K_y & -\tilde{\varepsilon}_{33}K_x\\ -\tilde{\mu}_{33}K_y & \tilde{\mu}_{33}K_x & -\tilde{\mu}_{31} & -\tilde{\mu}_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{E}_x\\ \mathrm{E}_y\\ \mathrm{H}_x\\ \mathrm{H}_y\end{bmatrix}$$

Расчет распределения электромагнитного поля

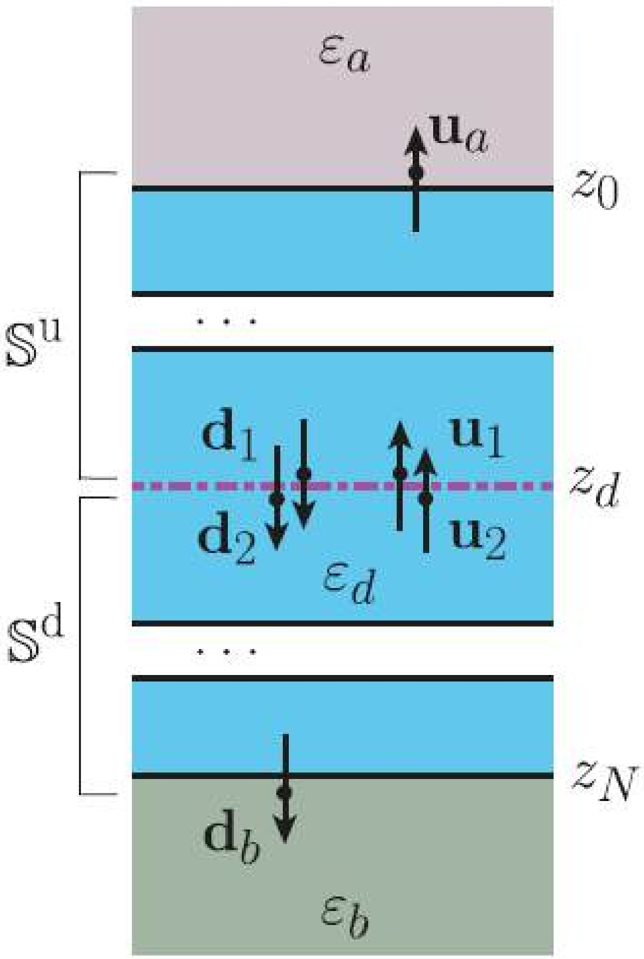




Расчет излучения осциллирующих токов



Расчет интенсивности излучения осциллирующих токов



$$\vec{j}(\vec{r},\omega) = \vec{j}(\omega)\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{d}})$$

$$\mathrm{J}_\alpha = j_\alpha e^{-i\rho_d\left(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{g}^{(m)}\right)}$$

гипервектор фурье-компонент полей имеет разрыв

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E}_x \\ \mathrm{E}_y \\ \mathrm{H}_x \\ \mathrm{H}_y \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} \mathrm{E}_x \\ \mathrm{E}_y \\ \mathrm{H}_x \\ \mathrm{H}_y \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -K_x\tilde{\varepsilon}^{33}\mathrm{J}_z \\ -K_y\tilde{\varepsilon}^{33}\mathrm{J}_z \\ -i\mathrm{J}_{\mathrm{y}} + i\tilde{\varepsilon}^{23}\mathrm{J}_z \\ +i\mathrm{J}_{\mathrm{x}} - i\tilde{\varepsilon}^{13}\mathrm{J}_z \end{bmatrix}$$

вектор амплитуд имеет разрыв

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_2 \\ \vec{\mathrm{u}}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_1 \\ \vec{\mathrm{u}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{d}} \\ \vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{u}} \end{bmatrix} \equiv \mathbb{F}^{-1}\mathrm{J}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_1 \\ \vec{\mathrm{u}}_a \end{bmatrix} = \mathbb{S}^{\mathrm{u}} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{o}} \\ \vec{\mathrm{u}}_1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_b \\ \vec{\mathrm{u}}_2 \end{bmatrix} = \mathbb{S}^{\mathrm{d}} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_2 \\ \vec{\mathrm{o}} \end{bmatrix}$$

Вектора амплитуд внутри структуры

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_1 \\ \vec{\mathrm{u}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12}\left(\mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12} - \mathcal{I}\right)^{-1}\left(\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{d}} - \mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{u}}\right) \\ \left(\mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12} - \mathcal{I}\right)^{-1}\left(\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{d}} - \mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{u}}\right) \end{bmatrix}$$

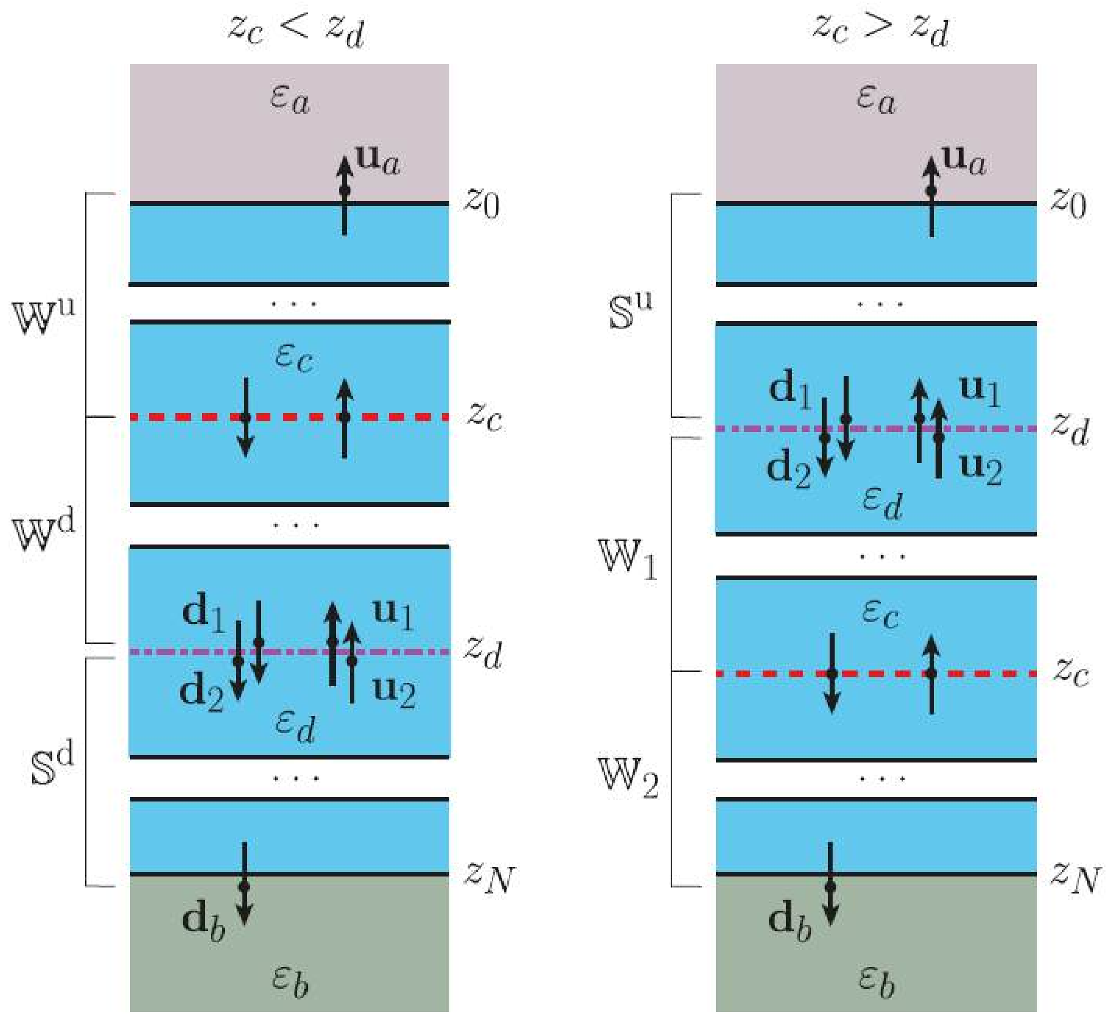
$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_2 \\ \vec{\mathrm{u}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathcal{I} - \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12}\mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\right)^{-1}\left(\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{u}} - \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12}\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{d}}\right) \\ \mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\left(\mathcal{I} - \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12}\mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\right)^{-1}\left(\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{u}} - \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12}\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{d}}\right) \end{bmatrix}$$

Вектора амплитуд вне структуры

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_a \\ \vec{\mathrm{u}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{o}} \\ \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{22}\left(\mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12} - \mathcal{I}\right)^{-1}\left(\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{d}} - \mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{u}}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_b \\ \vec{\mathrm{u}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{11}\left(\mathcal{I} - \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12}\mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\right)^{-1}\left(\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{u}} - \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12}\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{d}}\right) \\ \vec{\mathrm{o}} \end{bmatrix}$$

Расчет полей осциллирующих токов



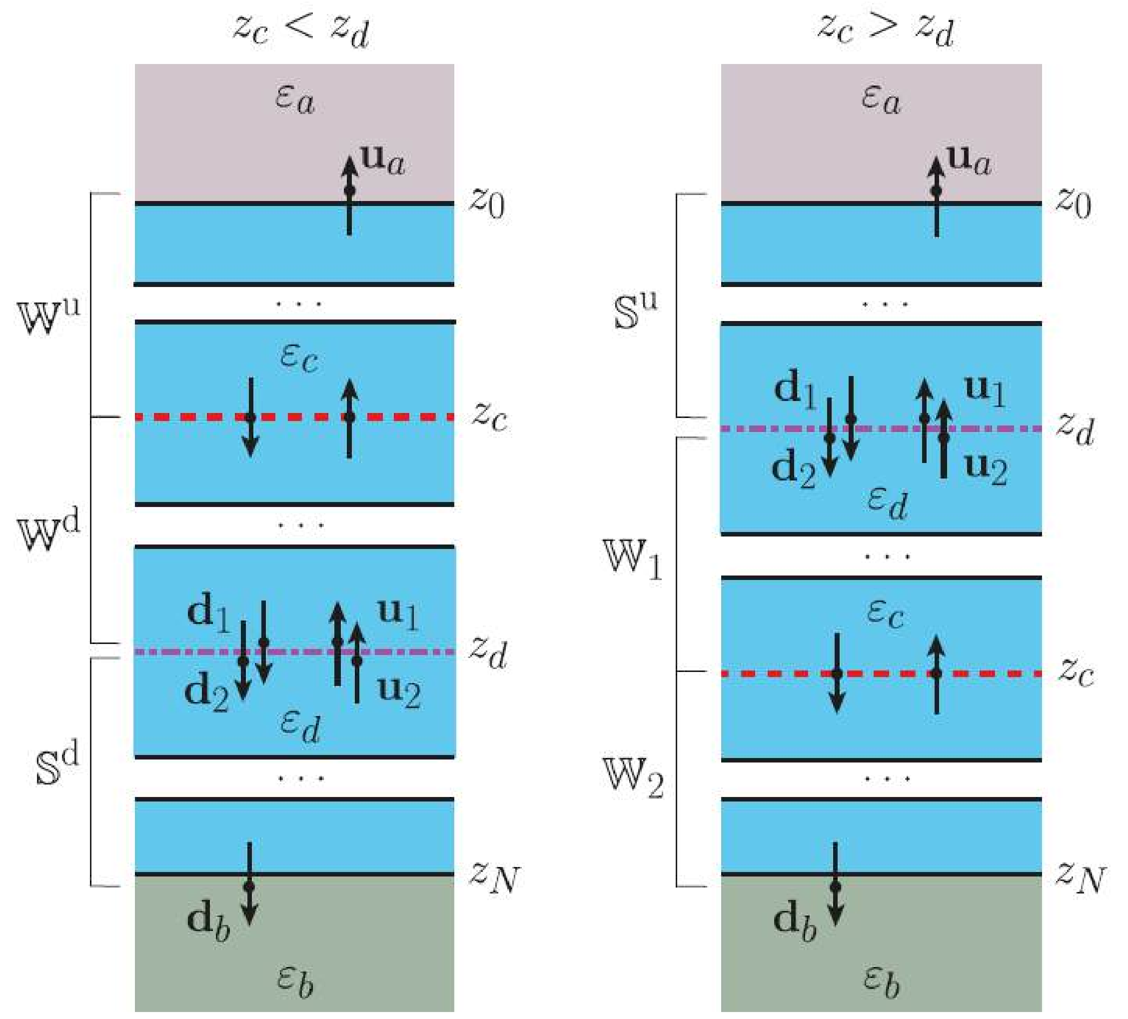
Для того, чтобы найти амплитуды излученных диполем плоских волн в произвольной координате z_c, такой что $z_c \neq z_d$, нужно дополнительно использовать связь между амплитудами плоских волн в этой координате с амплитудами $\vec{\mathrm{d}}_{1,2}$, $\vec{\mathrm{u}}_{1,2}$, $\vec{\mathrm{d}}_b$ и $\vec{\mathrm{u}}_a$:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_c \\ \vec{\mathrm{u}}_a \end{bmatrix} = \mathbb{W}^{\mathrm{u}} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{o}} \\ \vec{\mathrm{u}}_c \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_1 \\ \vec{\mathrm{u}}_c \end{bmatrix} = \mathbb{W}^{\mathrm{b}} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_c \\ \vec{\mathrm{u}}_1 \end{bmatrix}, \qquad \text{для } z_c < z_d, \\ \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_c \\ \vec{\mathrm{u}}_2 \end{bmatrix} = \mathbb{W}^{\mathrm{u}} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_2 \\ \vec{\mathrm{u}}_c \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_b \\ \vec{\mathrm{u}}_c \end{bmatrix} = \mathbb{W}^{\mathrm{b}} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_c \\ \vec{\mathrm{o}} \end{bmatrix}, \qquad \text{для } z_c > z_d, \end{cases} \tag{1.71}$$

где сделаны следующие обозначения:

$$\begin{cases} \mathbb{W}^{\mathrm{u}} \equiv \mathbb{S}(z_0 - 0, z_c), \quad \mathbb{W}^{\mathrm{d}} \equiv \mathbb{S}(z_c, z_d - 0), \qquad \text{для } z_c < z_d, \\ \mathbb{W}^{\mathrm{u}} \equiv \mathbb{S}(z_d + 0, z_c), \quad \mathbb{W}^{\mathrm{d}} \equiv \mathbb{S}(z_c, z_N + 0), \qquad \text{для } z_c > z_d. \end{cases} \tag{1.72}$$

Расчет полей осциллирующих токов



Можно показать, что вектор амплитуд $\mathrm{A}(z_c) = [\vec{\mathrm{d}}_c, \vec{\mathrm{u}}_c]^{\mathrm{T}}$ находится при помощи решения следующей переопределенной системы уравнений:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\mathbb{W}^{\mathrm{u}}_{12} \\ \mathcal{O} & +\mathbb{W}^{\mathrm{u}}_{22} \\ \mathbb{W}^{\mathrm{d}}_{11} & \mathcal{O} \\ \mathbb{W}^{\mathrm{d}}_{21} & -\mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_c \\ \vec{\mathrm{u}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{o}} \\ \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{22}\vec{\mathrm{u}}_1 \\ \left(\mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12} - \mathbb{W}^{\mathrm{d}}_{12}\right)\vec{\mathrm{u}}_1 \\ -\mathbb{W}^{\mathrm{d}}_{22}\vec{\mathrm{u}}_1 \end{bmatrix} & \text{для } z_c < z_d, \\ \begin{bmatrix} \mathcal{I} & -\mathbb{W}^{\mathrm{u}}_{12} \\ \mathcal{O} & +\mathbb{W}^{\mathrm{u}}_{22} \\ \mathbb{W}^{\mathrm{d}}_{11} & \mathcal{O} \\ \mathbb{W}^{\mathrm{d}}_{21} & -\mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{d}}_c \\ \vec{\mathrm{u}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\mathbb{W}^{\mathrm{u}}_{11}\vec{\mathrm{d}}_2 \\ \left(\mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21} - \mathbb{W}^{\mathrm{u}}_{21}\right)\vec{\mathrm{d}}_2 \\ \mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{11}\vec{\mathrm{d}}_2 \\ \vec{\mathrm{o}} \end{bmatrix} & \text{для } z_c > z_d, \end{cases} \qquad (1.73)$$

где согласно формуле (1.67)

$$\begin{cases} \vec{\mathrm{u}}_1 = \left(\mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12} - \mathcal{I}\right)^{-1}\left(\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{d}} - \mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{u}}\right) & \text{для } z_c < z_d \\ \vec{\mathrm{d}}_2 = \left(\mathcal{I} - \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12}\mathbb{S}^{\mathrm{d}}_{21}\right)^{-1}\left(\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{u}} - \mathbb{S}^{\mathrm{u}}_{12}\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{d}}\right) & \text{для } z_c > z_d \end{cases} \qquad (1.74)$$

Расчет фактора Парселла в ФК периодическом слое

Определение фактора Парселла $F_p = \dfrac{\Gamma^{\mathrm{cav}}_{\mathrm{rad}}}{\Gamma^{\mathrm{o}}_{\mathrm{rad}}}$

Скорость рекомбинации спонтанной эмиссии в диэлектричексом окружении:

$$\Gamma = \Gamma^{\mathrm{cav}}_{\mathrm{rad}} + \Gamma_{\mathrm{nr}} = F_p \Gamma^{\mathrm{o}}_{\mathrm{rad}} + \Gamma_{\mathrm{nr}}$$

скорость излучательной рекомбинаци **скорость безызлучательной рекомбинации**

Практическое вычисление фактора Парселла:

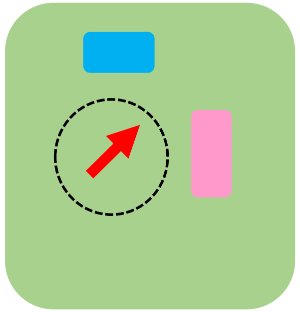
$$\boxed{F_p(\omega) = \frac{P^{\mathrm{cav}}(\omega)}{P(\omega)}}$$

диполь в однородной среде

$$P(\omega) = \frac{|\vec{j}_{\mathrm{o}}|^2 \omega^2 n}{3c^3}$$

диполь в произвольном окружении

$$P^{\mathrm{cav}}(\omega) = \oiint \vec{S}(\omega) \mathrm{d}\vec{A}.$$

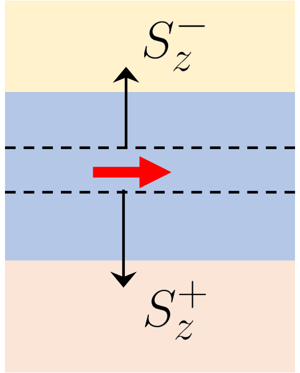


диполь в многослойной среде

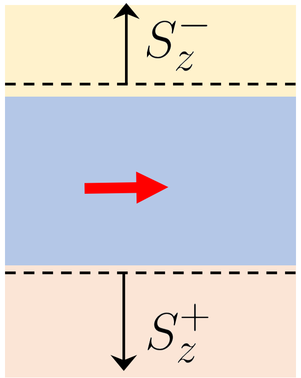
$$P^{\pm}(\omega, z) \equiv \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} S_z^{\pm}(\omega, \vec{\rho}, z) \mathrm{d}^2\vec{\rho}.$$

$$P^{\pm}(\omega, z) \equiv \iint\limits_{\mathrm{FBZ}} \mathrm{S}_z^{\pm}(\omega, \vec{q}, z) \frac{\mathrm{d}^2\vec{q}}{(2\pi)^2}$$

полный фактор Парселла



внешний фактор Парселла



$$\boxed{F_p(\omega) = \frac{3c^3}{|j_0|^2 \omega^2 n} \iint\limits_{\mathrm{FBZ}} \left[\mathrm{S}_z^{+}(\omega, \vec{q}) + \mathrm{S}_z^{-}(\omega, \vec{q}) \right] \frac{\mathrm{d}^2\vec{q}}{(2\pi)^2}}$$

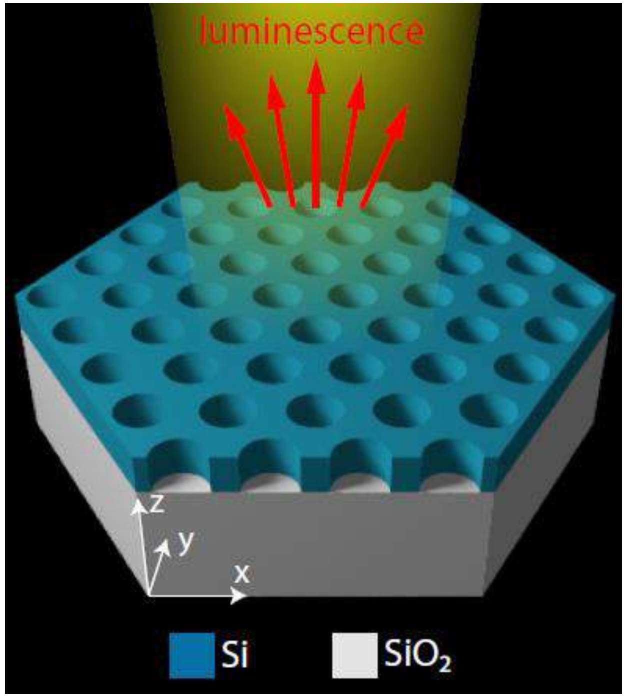
Расчет фактора Парселла

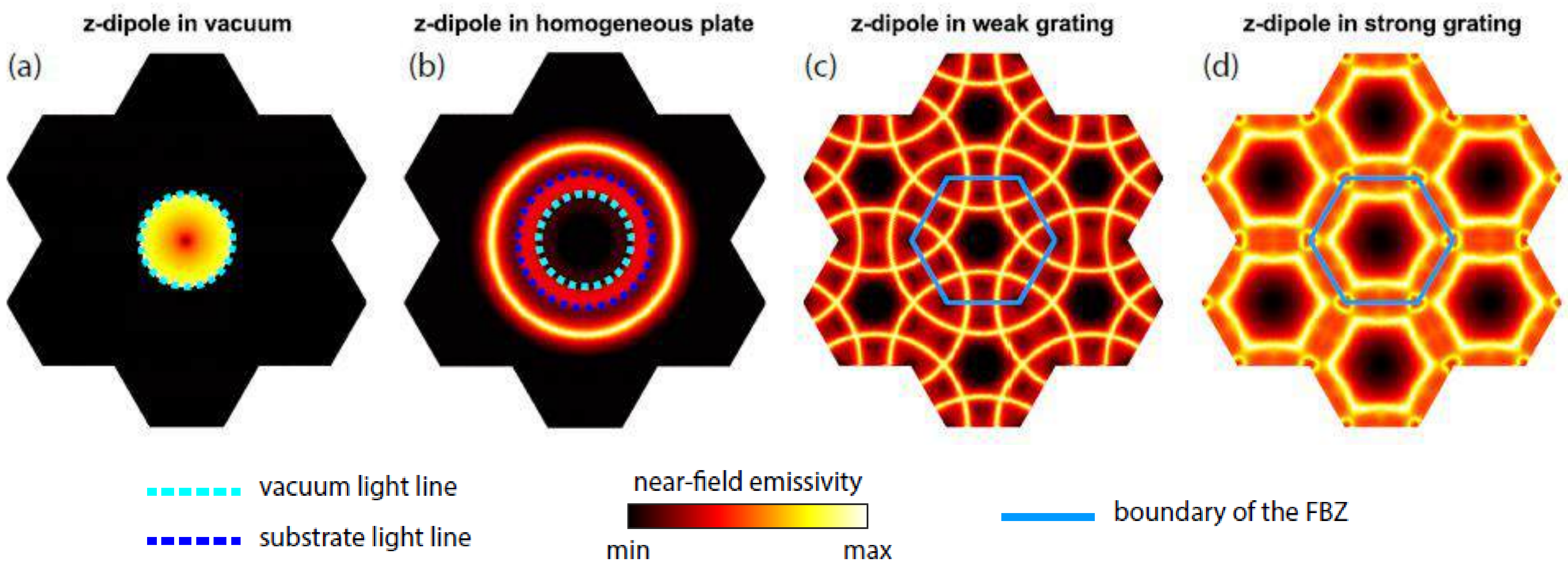
Фактор Парселла в однородном слое

$$F_p(\omega) = \frac{3c^3}{|j_0|^2\omega^2 n} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{S}_z^{+}(\omega, k_x, k_y) + \mathrm{S}_z^{-}(\omega, k_x, k_y) \right] \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y$$

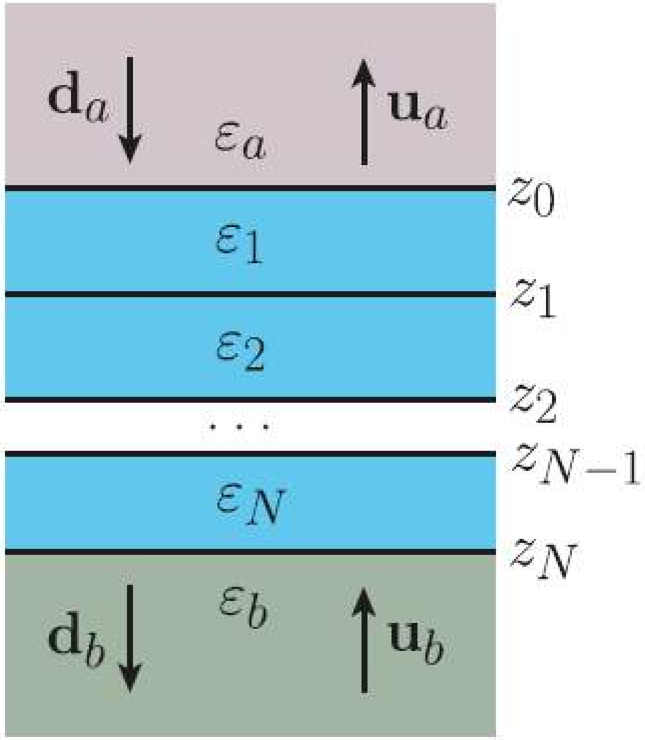
Фактор Парселла в периодическом слое

$$F_p(\omega) = \frac{3c^3}{|j_0|^2\omega^2 n} \iint\limits_{\mathrm{FBZ}} \left[\mathrm{S}_z^{+}(\omega, k_x, k_y) + \mathrm{S}_z^{-}(\omega, k_x, k_y) \right] \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y,$$





Расчет резонансов послойно-периодической структуры



$$\mathrm{B}_{\mathrm{out}} = \mathbb{S}(\omega, k_x, k_y)\mathrm{B}_{\mathrm{in}}$$

$$\mathbb{S}^{-1}(\omega, k_x, k_y)\mathrm{B}_{\mathrm{out}} = \mathrm{O}$$

$$\mathbb{S}^{-1}(\omega) = \mathbb{S}^{-1}(\omega_n) + \left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{S}(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_n}(\omega - \omega_n). \tag{1.78}$$

Находя нули линейной относительно ω правой части этого выражения, можно получить значение ω_{n+1} для следующего шага итерации. Для этого необходимо рассмотреть правую часть как обобщенную задачу на собственные значения, в которой $(\omega - \omega_n)$ будет играть роль собственного значения:

$$\mathbb{S}^{-1}(\omega_n)\mathrm{B}_{\mathrm{out}} = -\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{S}(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_n}(\omega - \omega_n)\mathrm{B}_{\mathrm{out}} \tag{1.79}$$

Часть 2
Излучение Ge наноостровков из кремниевого фотонно-кристаллического волновода

Sergei Tikhodeev

Nikolay Gippius

Andrey Bogdanov

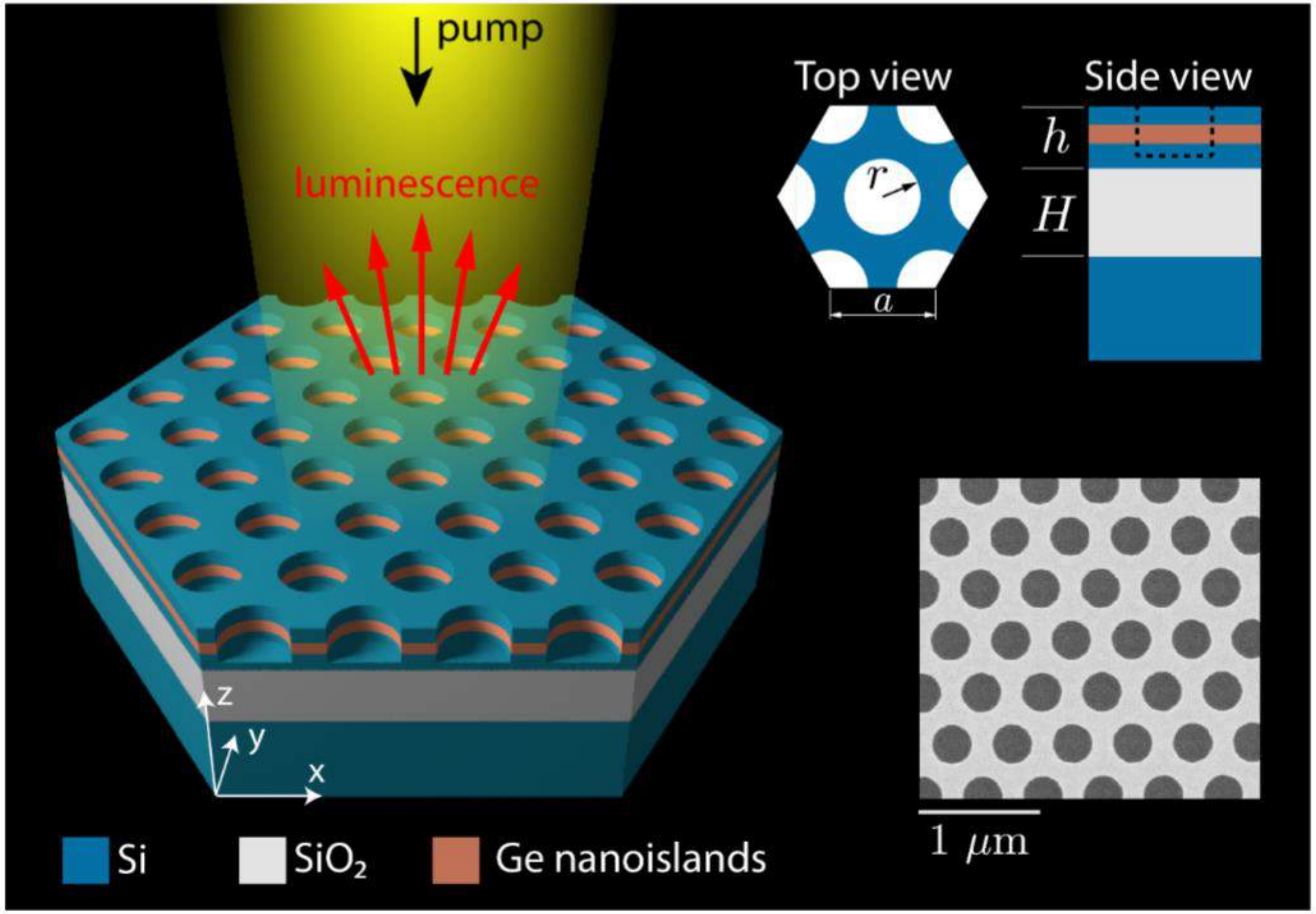
Margarita Stepikhova

Dmitry Yurasov

Alexey Novikov

Skoltech
IPM RAS, Nizhniy Novgorod
ITMO, St. Petersburg

Мотивация



В структурах с Ge наноостровками наблюдается фотолюминесценция при комнатной температуре на длинах волн 1.3–1.6 мкм (0.75–0.95 мкм).

Важным преимуществом Ge наноостровков является то, что они могут быть точно расположены в горячих точках квазиволноводных мод в фотонных структурах.

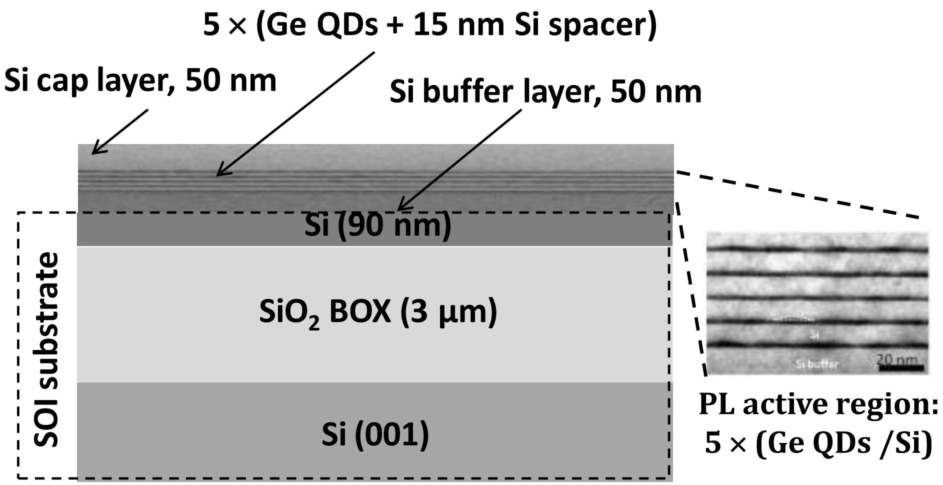
Периодические фотонные структуры без полостей могут поддерживать состояния с высокой добротностью с профилем моды, однородно распределенным по всей фотонной структуре.

Изготовление ФК слоев с германиевыми наноостровками

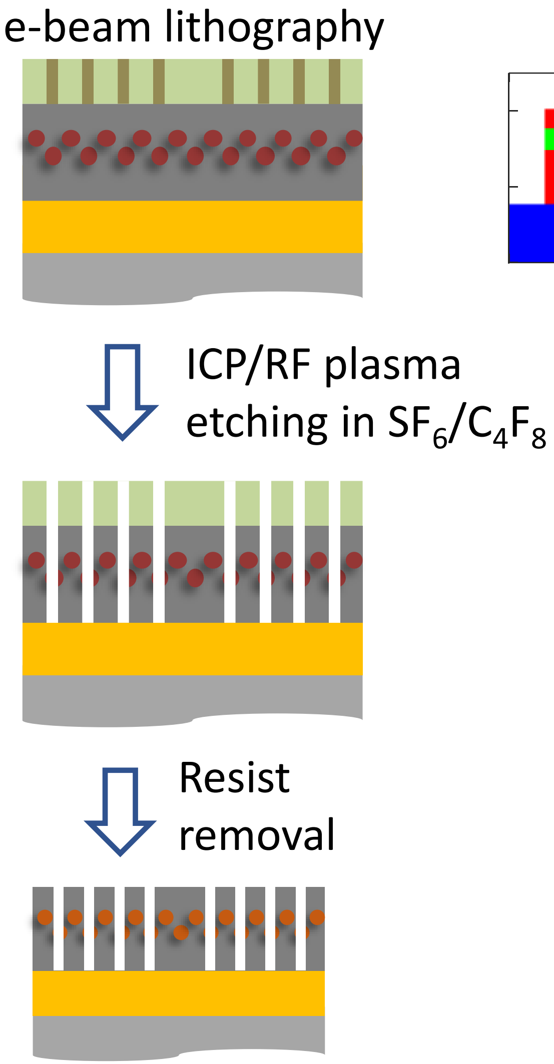
Многослойная структура, содержащая 5 периодов слоев наноостровков Ge(Si), с промежуточными слоями Si:

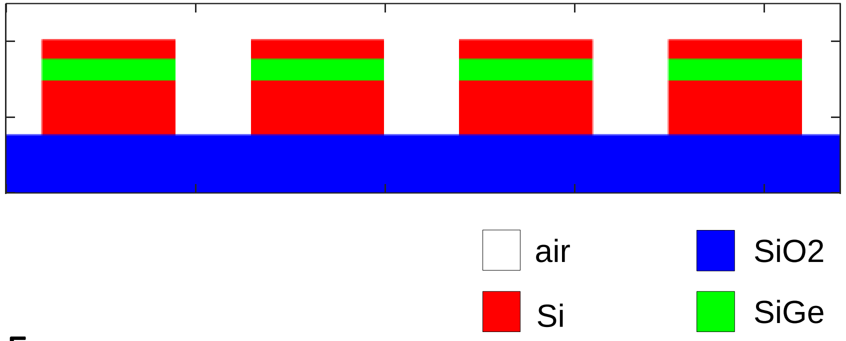
- **Si слой d=50 нм**
- **5 x (Si, d=15 нм / Ge, d=8МС)**
- **Si буферный слой, d=50 нм**

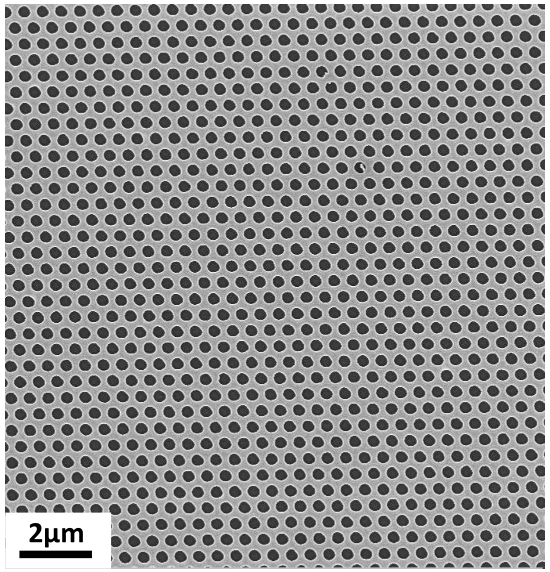
Эпитаксиальный рост проводился на утоньшенной подложке SOI (приборный слой подложки утоньшался до 90 нм). Суммарная толщина волноводного слоя ~ 250 нм.



Толщина волноводного слоя ~ 250нм







Экспериментальная установка

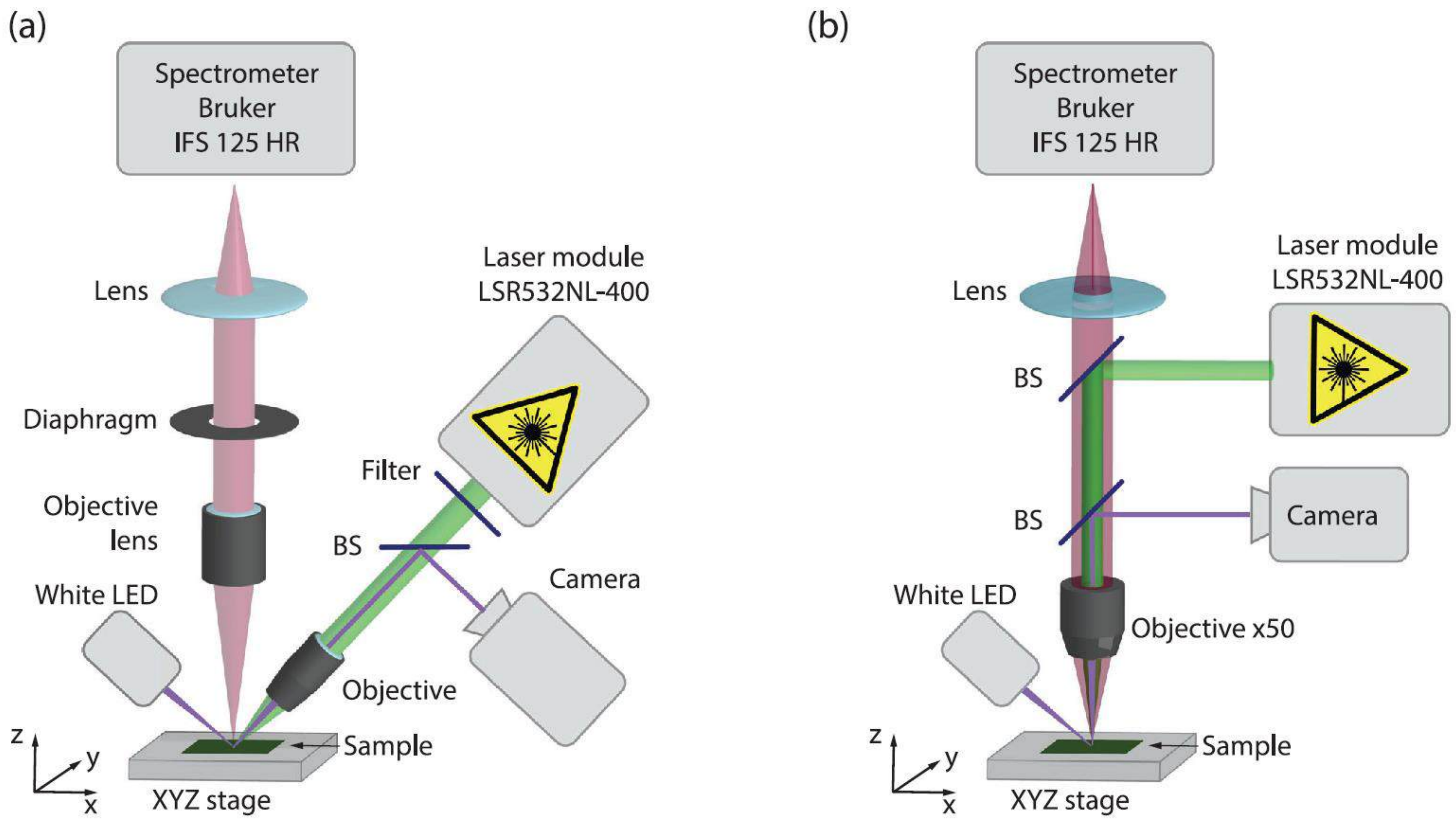
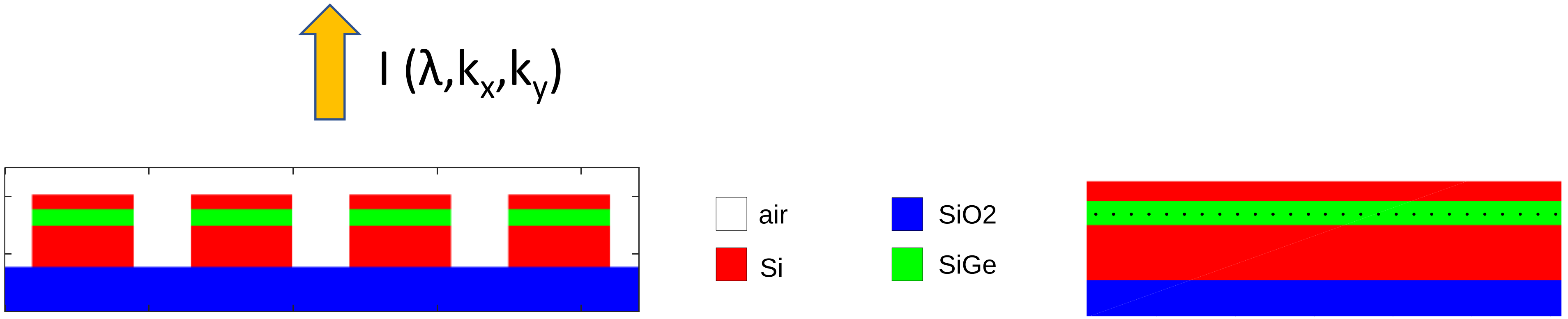


Figure 8. Schematics of a) the directional photoluminescence (DPL) setup and b) the microphotoliminescence (μPL) setup.

Метод расчета



неструктурированный образец

- Fourier modal method (RCWA)

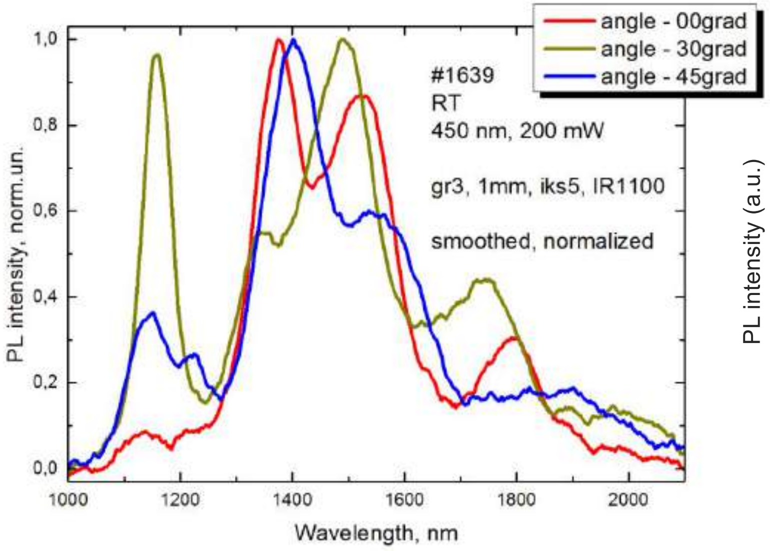
$$|\mathbf{O}\rangle = \mathbb{S}(\lambda, k_x, k_y)\,|\mathbf{I}\rangle$$

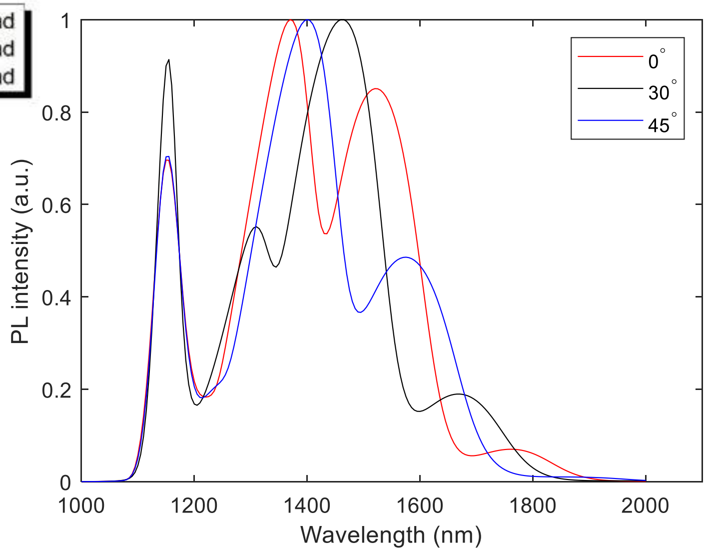
- Emissivity is calculated by the method of oscillating dipoles.

- Eigenmodes are calcultated by finding the poles of scattering

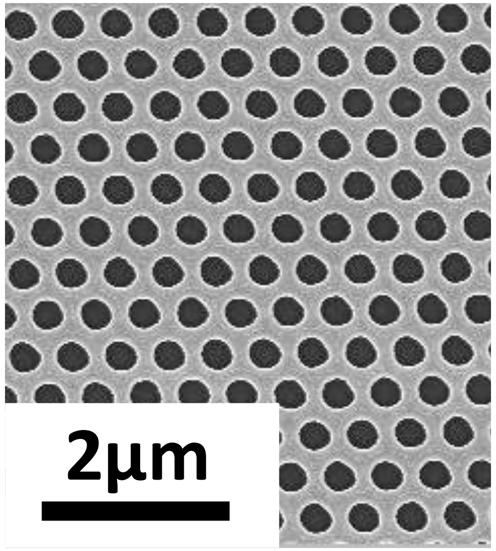
$$\mathbb{S}^{-1}(\lambda, k_x, k_y)\,|\mathbf{O}\rangle_{res} = |0\rangle$$

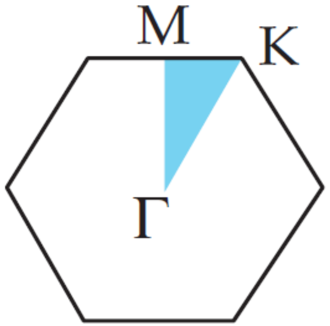
$$E_{\mathrm{res}} = \Omega - i\Gamma$$

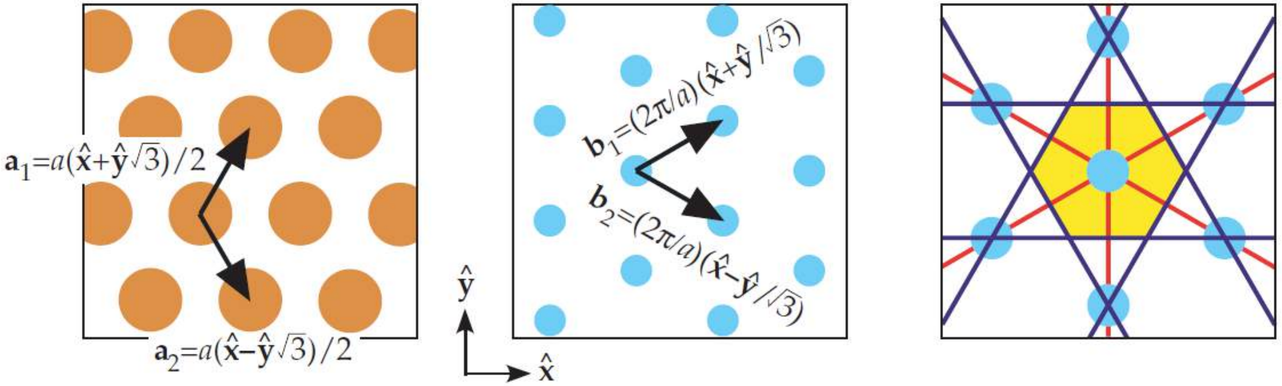




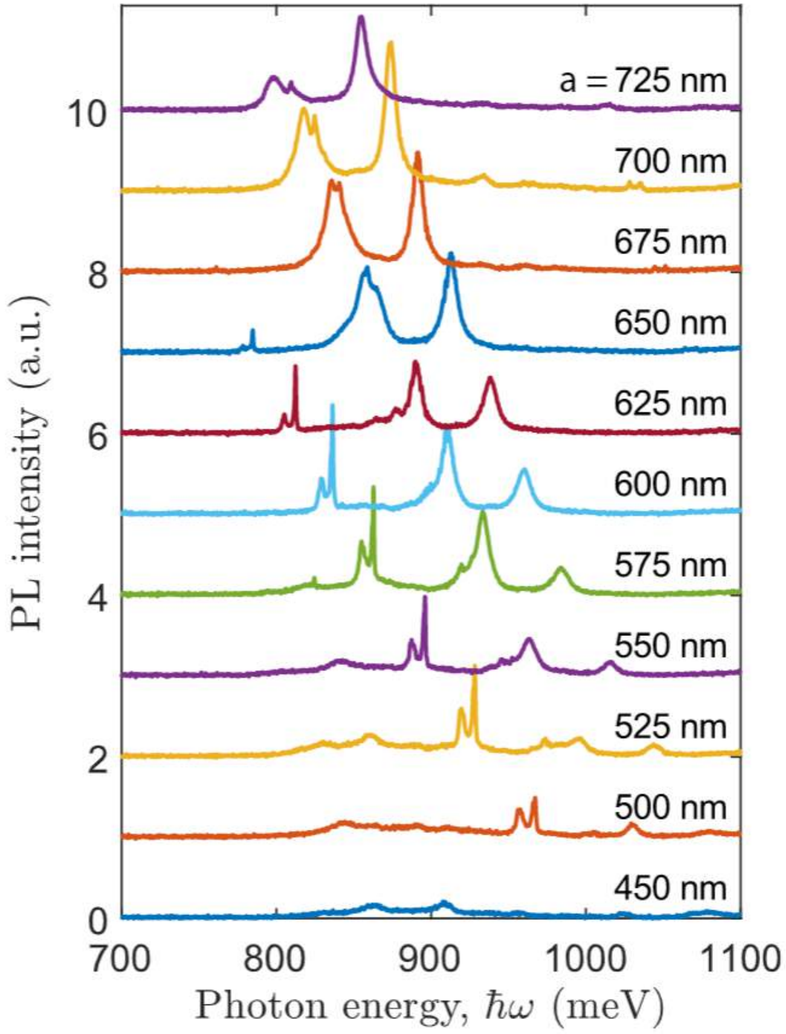
Треугольная решетка и первая зона Бриллюэна

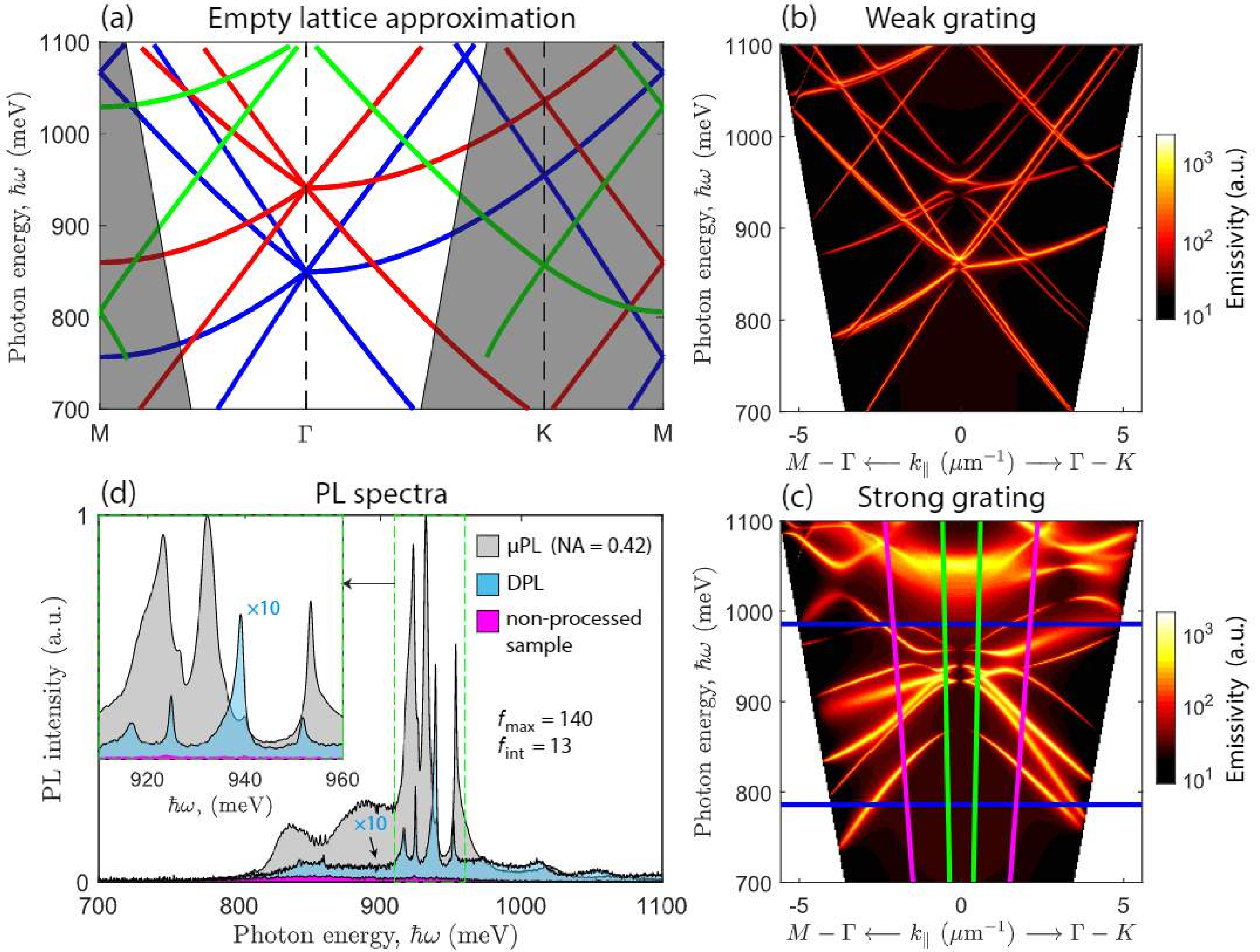




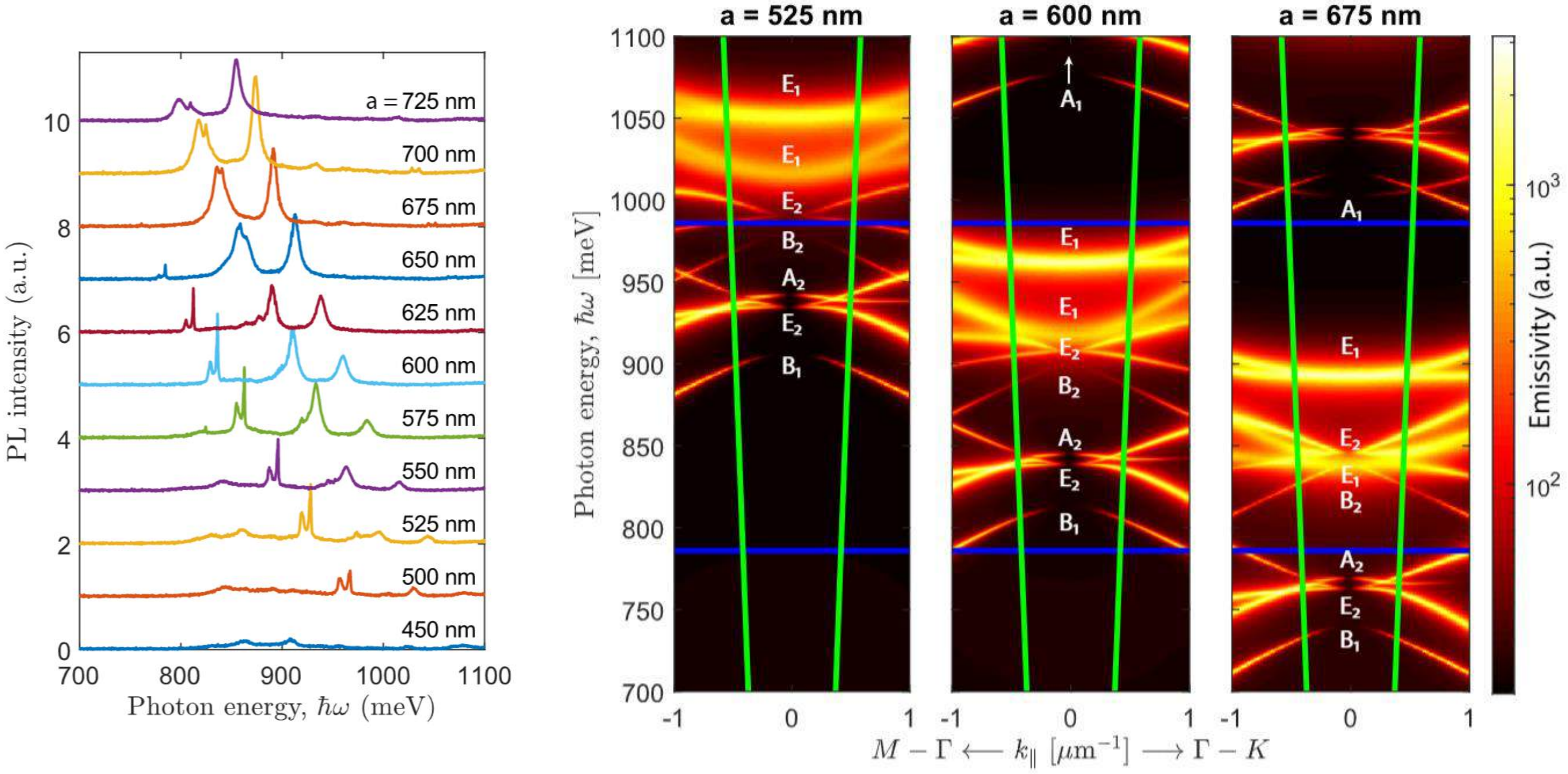


Квазиволноводные моды в ФК слоях и спектры излучения

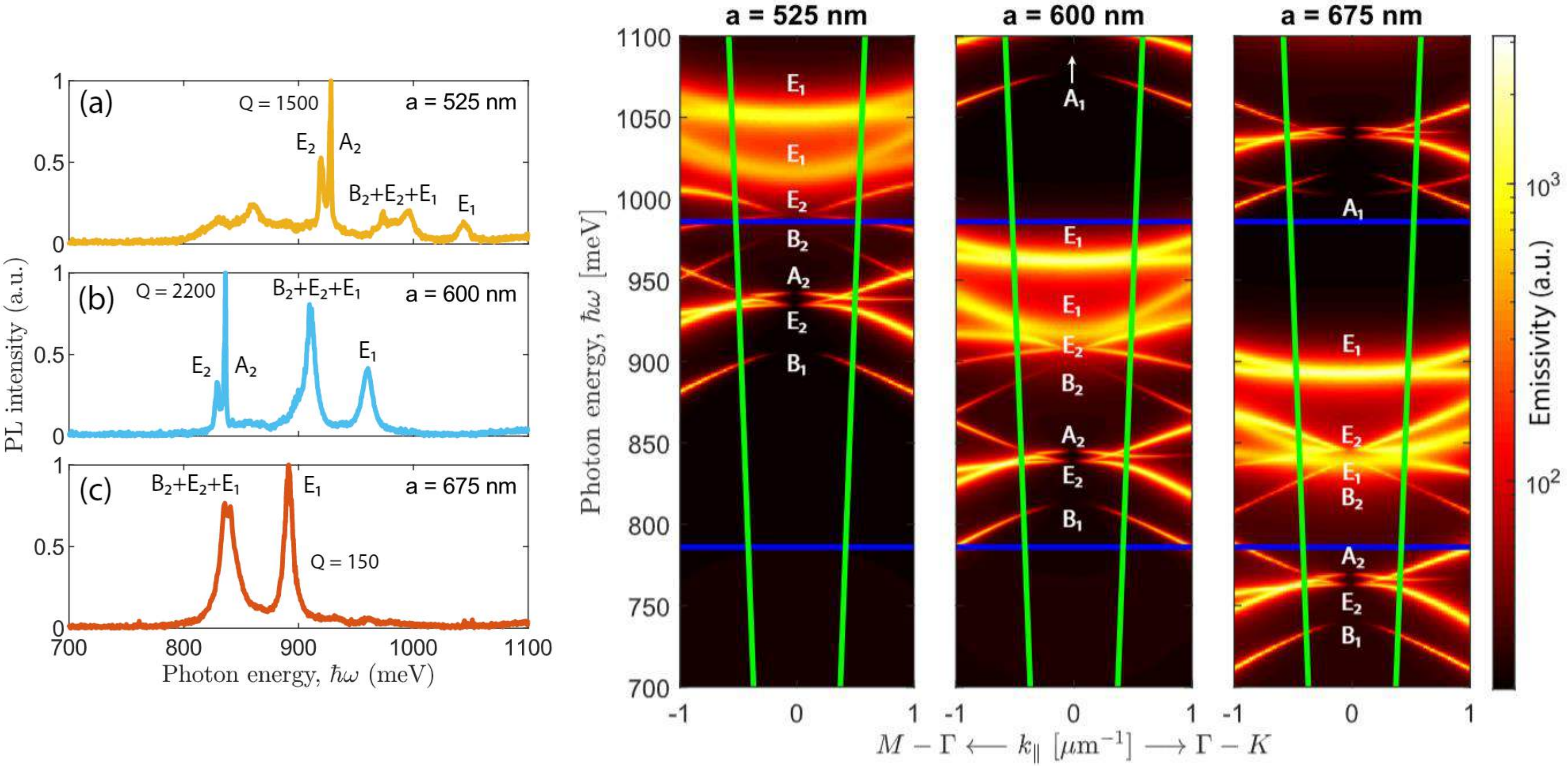




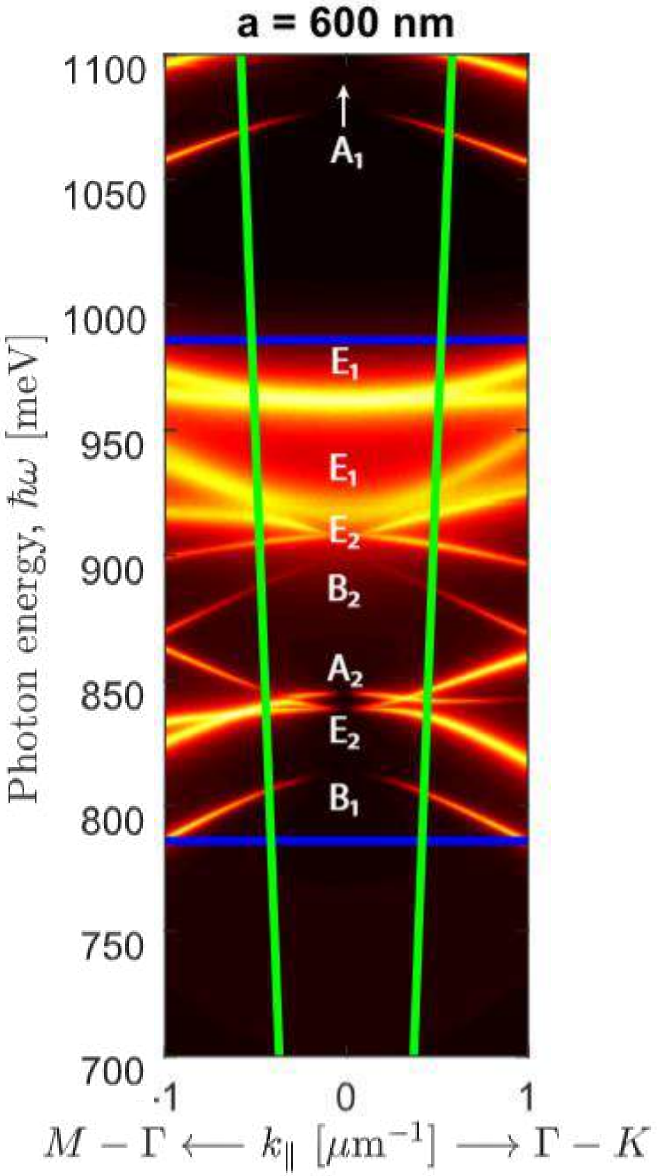
Резонансы вблизи Г-точки

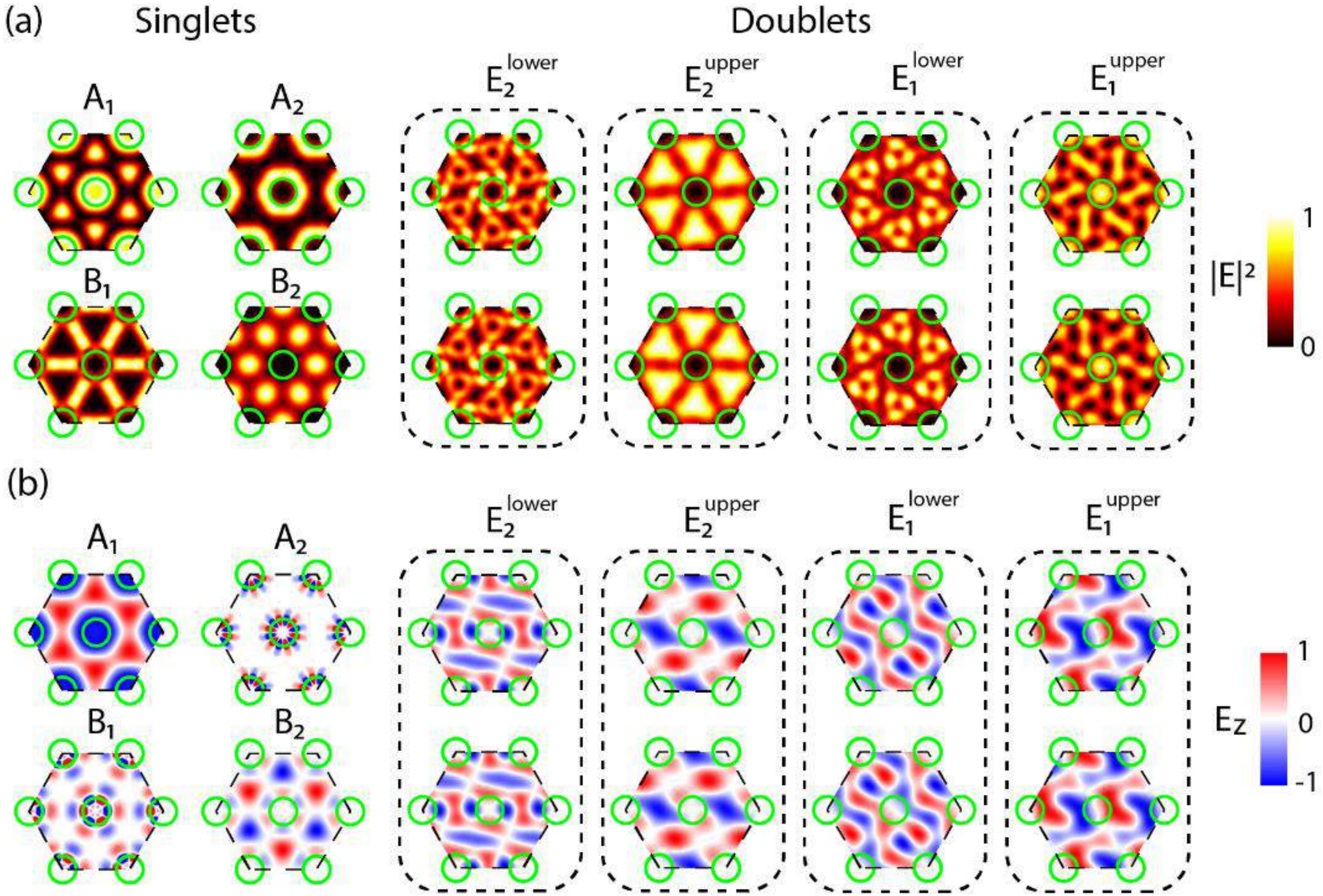


Резонансы вблизи Г-точки



Симметрия квазиволноводных мод





Построение распределения поля в

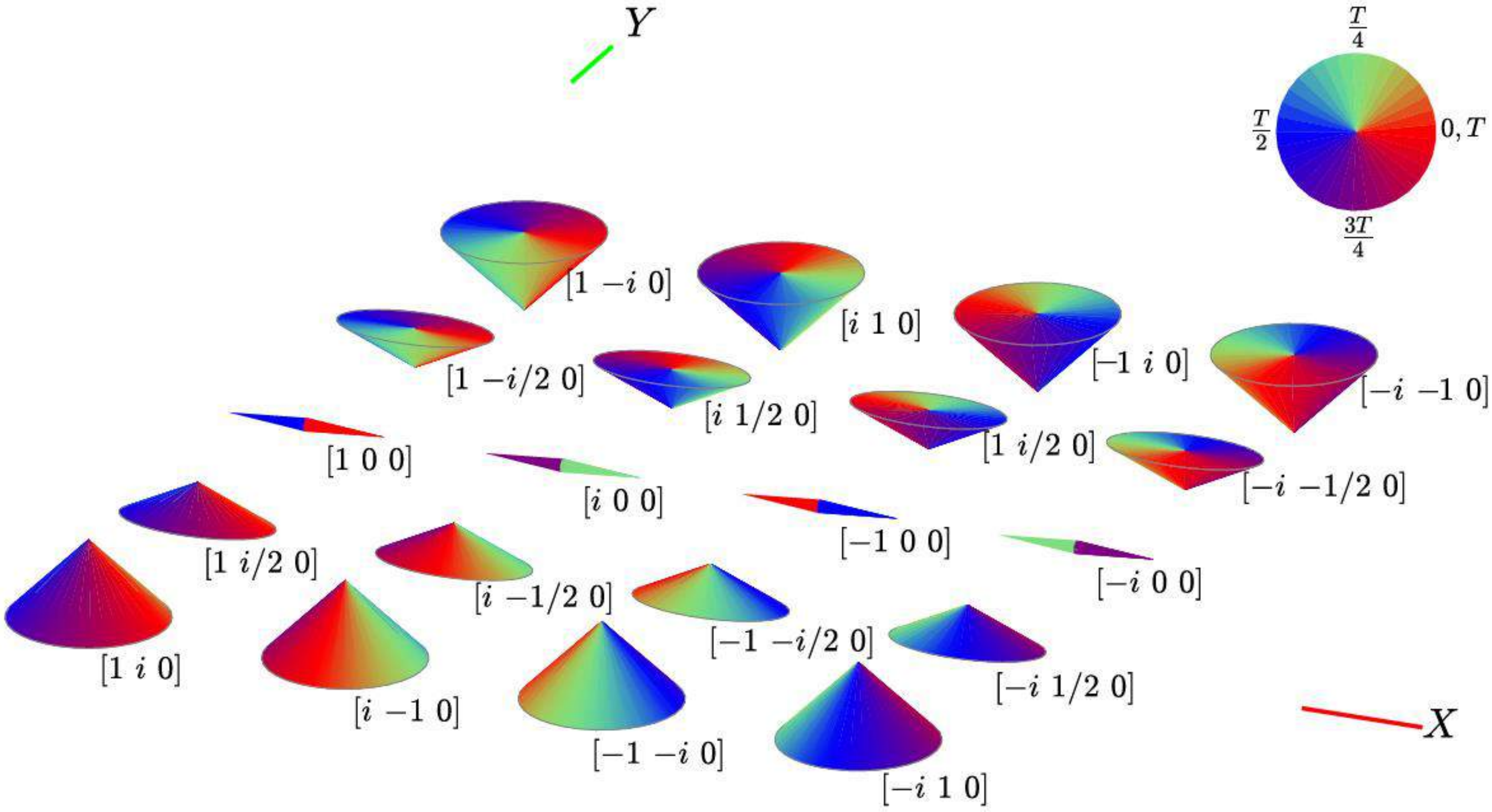
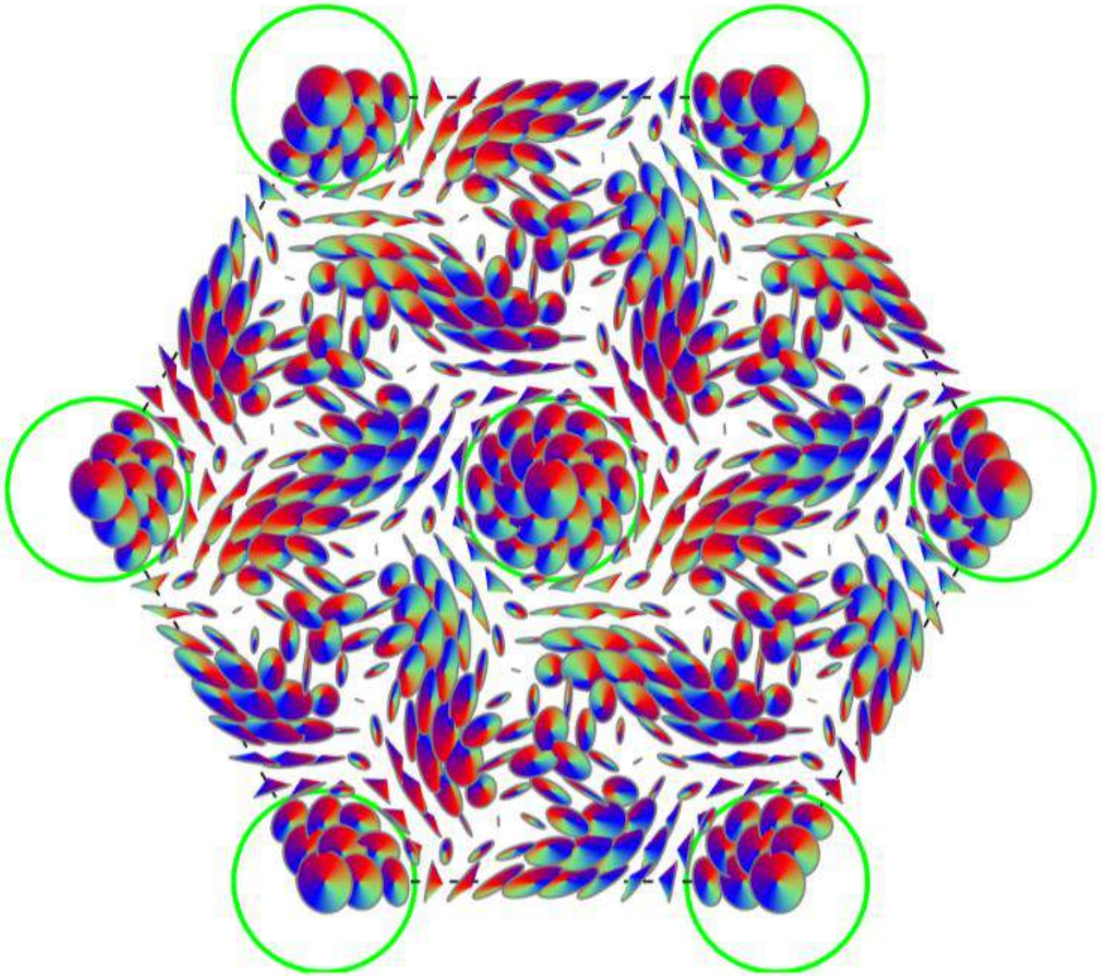


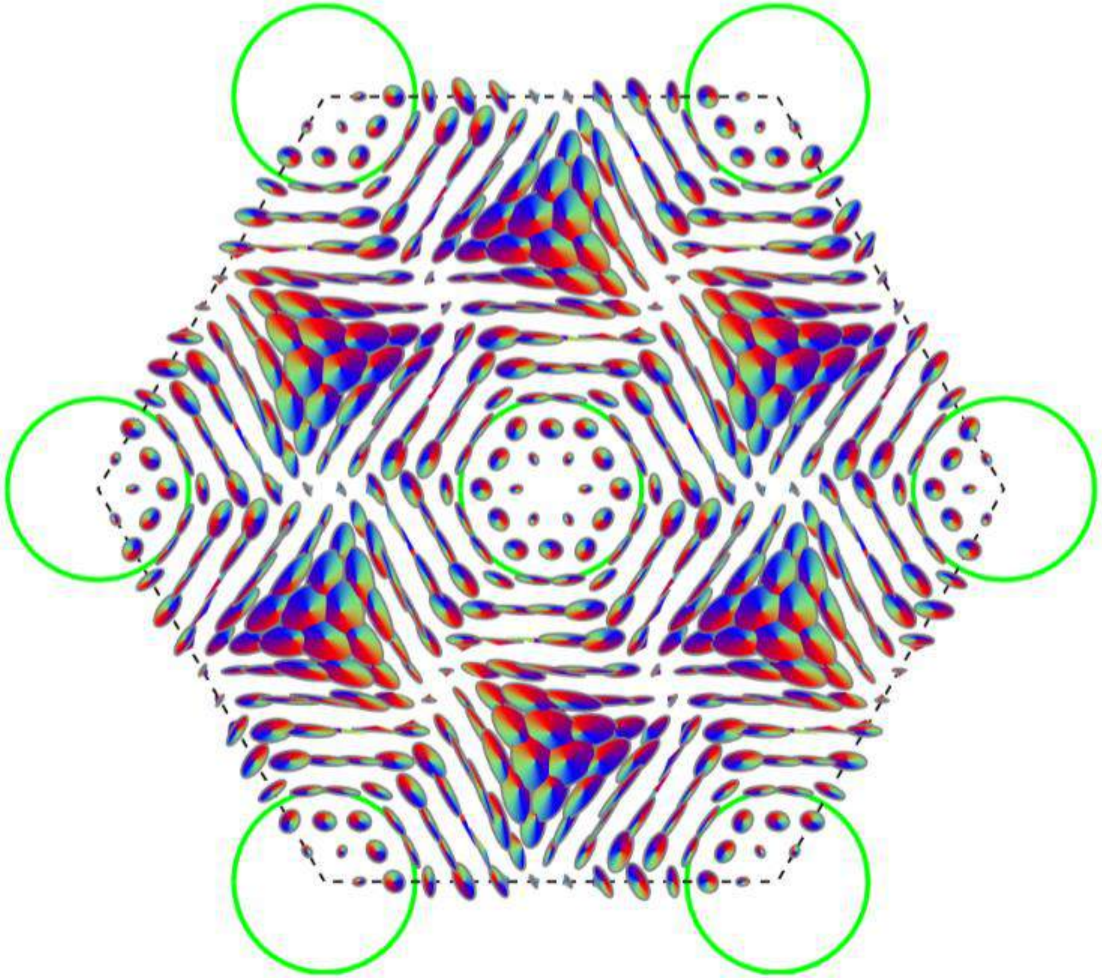
Figure 1: (Color online) Phase representation of the fields set by different amplitude vectors $\vec{F}$.

Распределение поля в модах

Верхний дублет E_1 — $E_{res} = 960.3\text{-}2.77$ мэВ

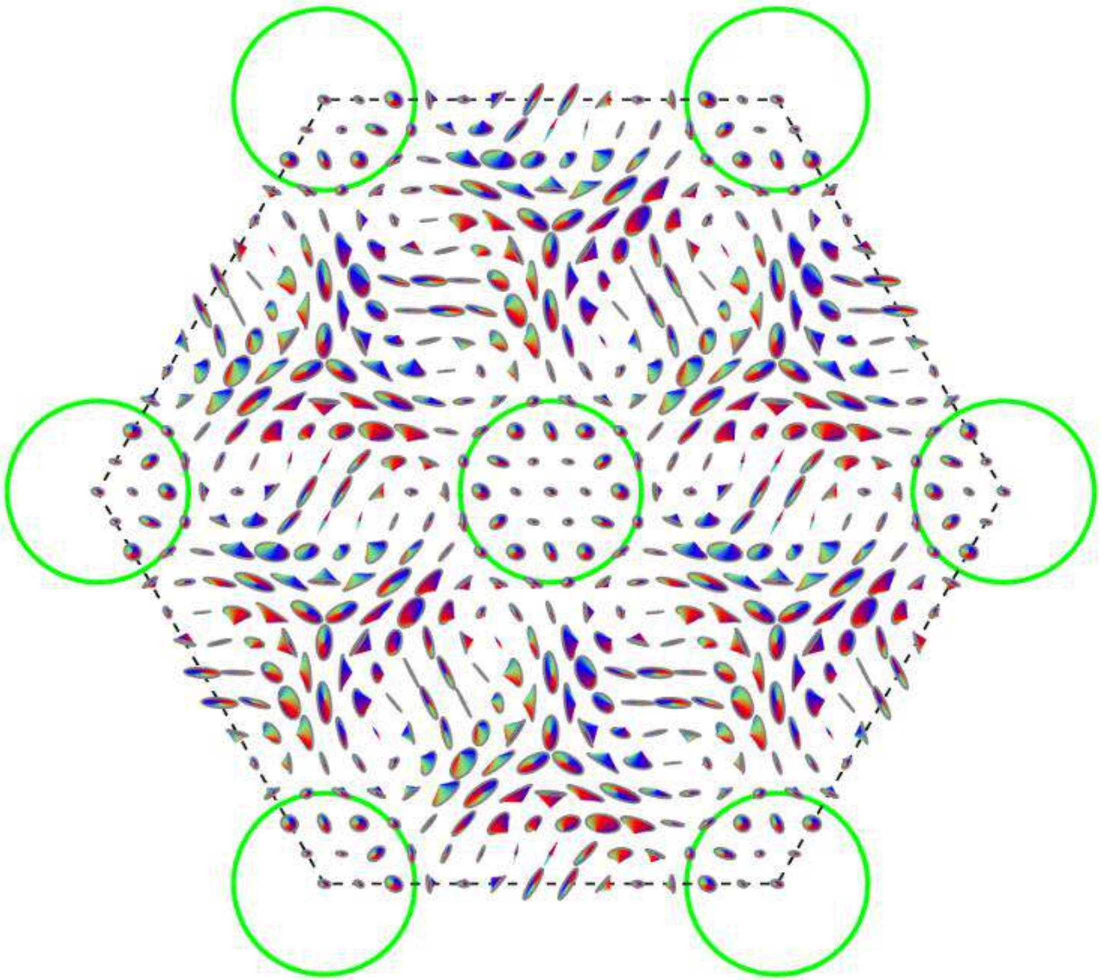


Верхний дублет E_2 — $E_{res} = 906.9\text{-}0.60$ мэВ

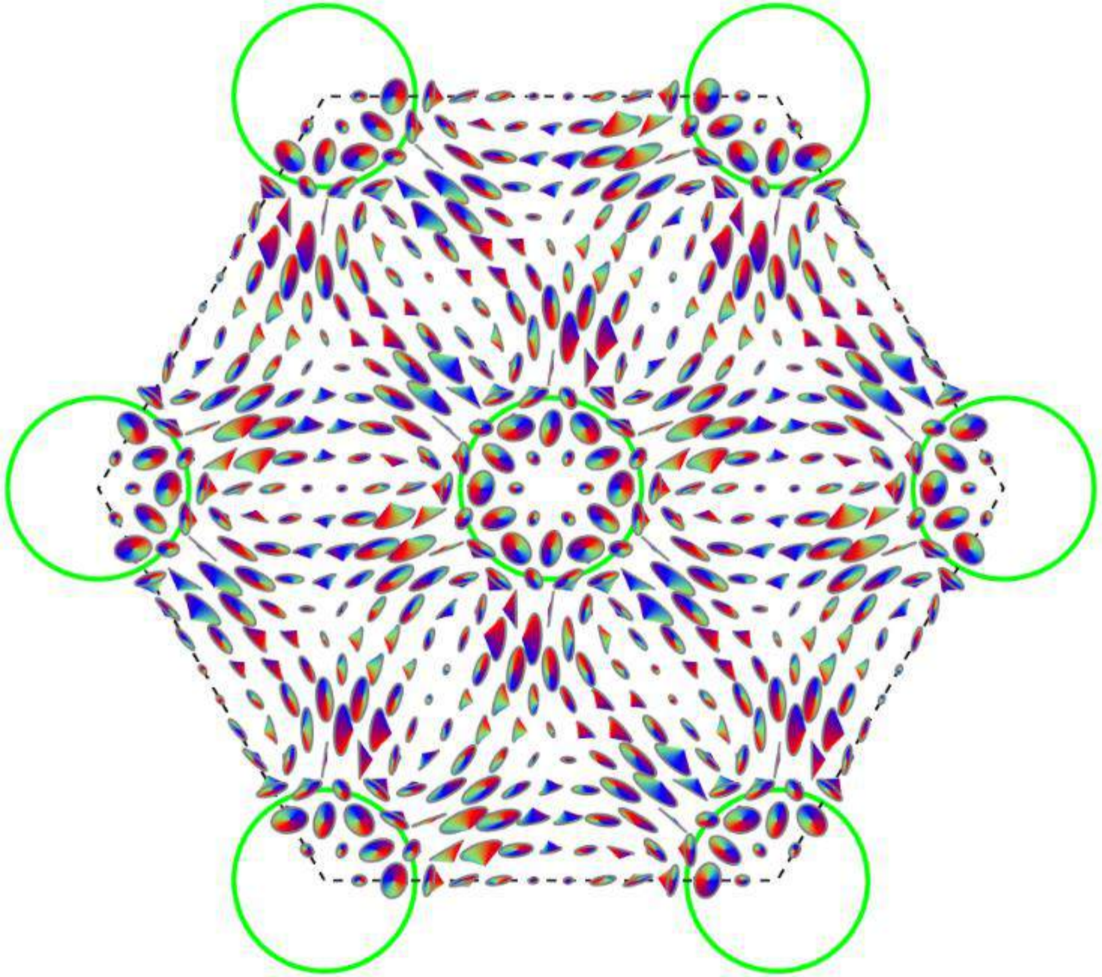


Распределение поля в модах

Нижний дублет E_1 — $E_{res} = 916.2\text{-}5.26i$ мэВ

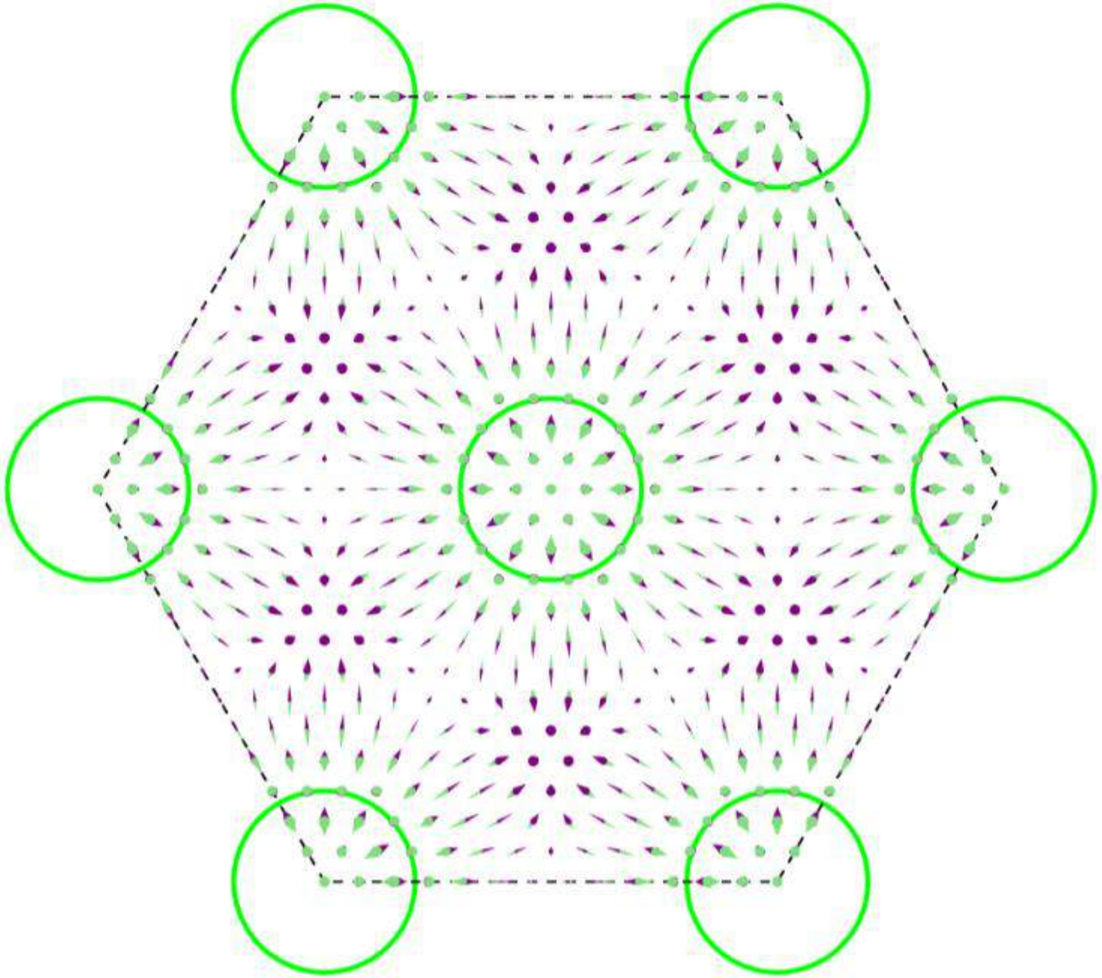


Нижний дублет E_2 — $E_{res} = 837.6\text{-}0.43$ мэВ

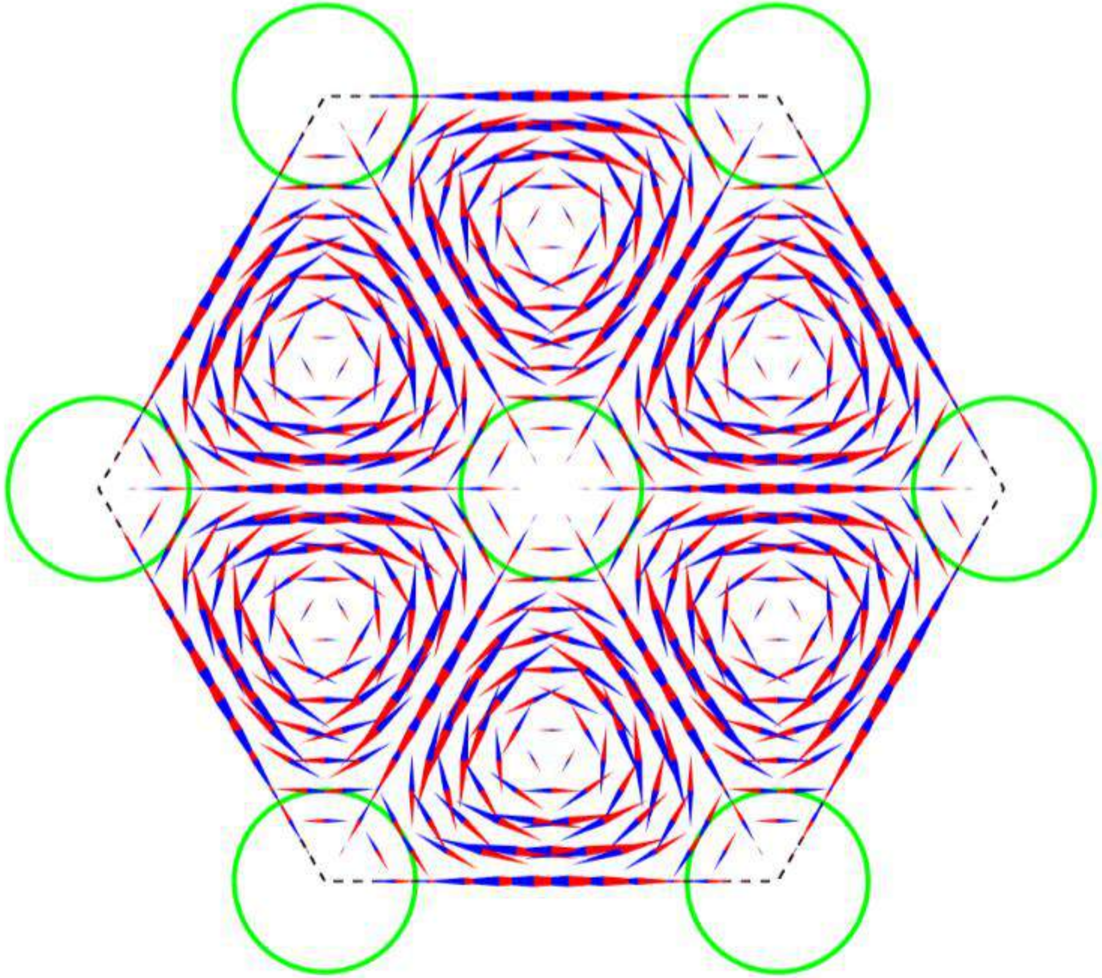


Распределение поля в модах

Синглет A_1 — E_{res} = 1088.3-0.70i мэВ

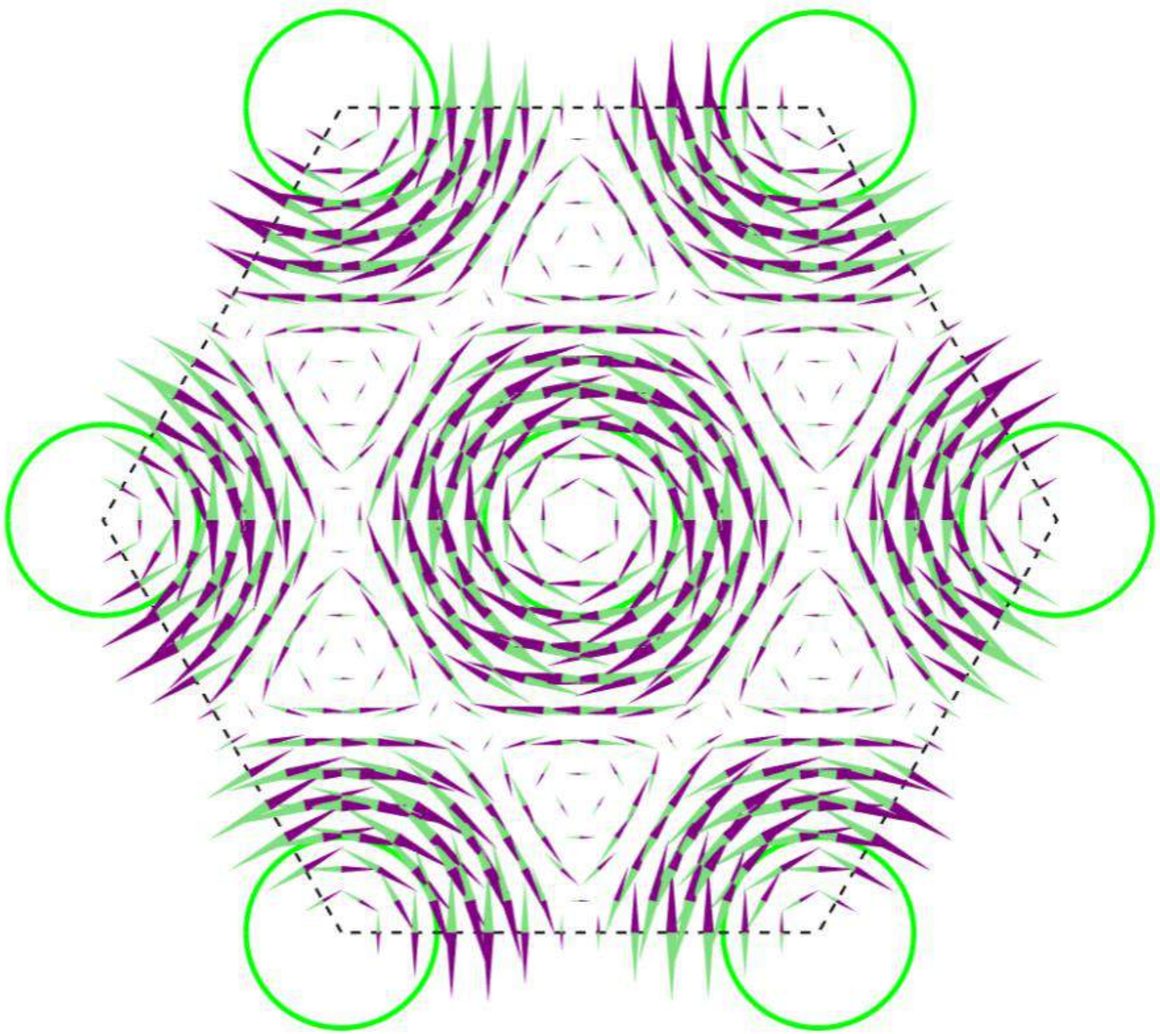


Синглет B_1 — E_{res} = 812-0.46i мэВ

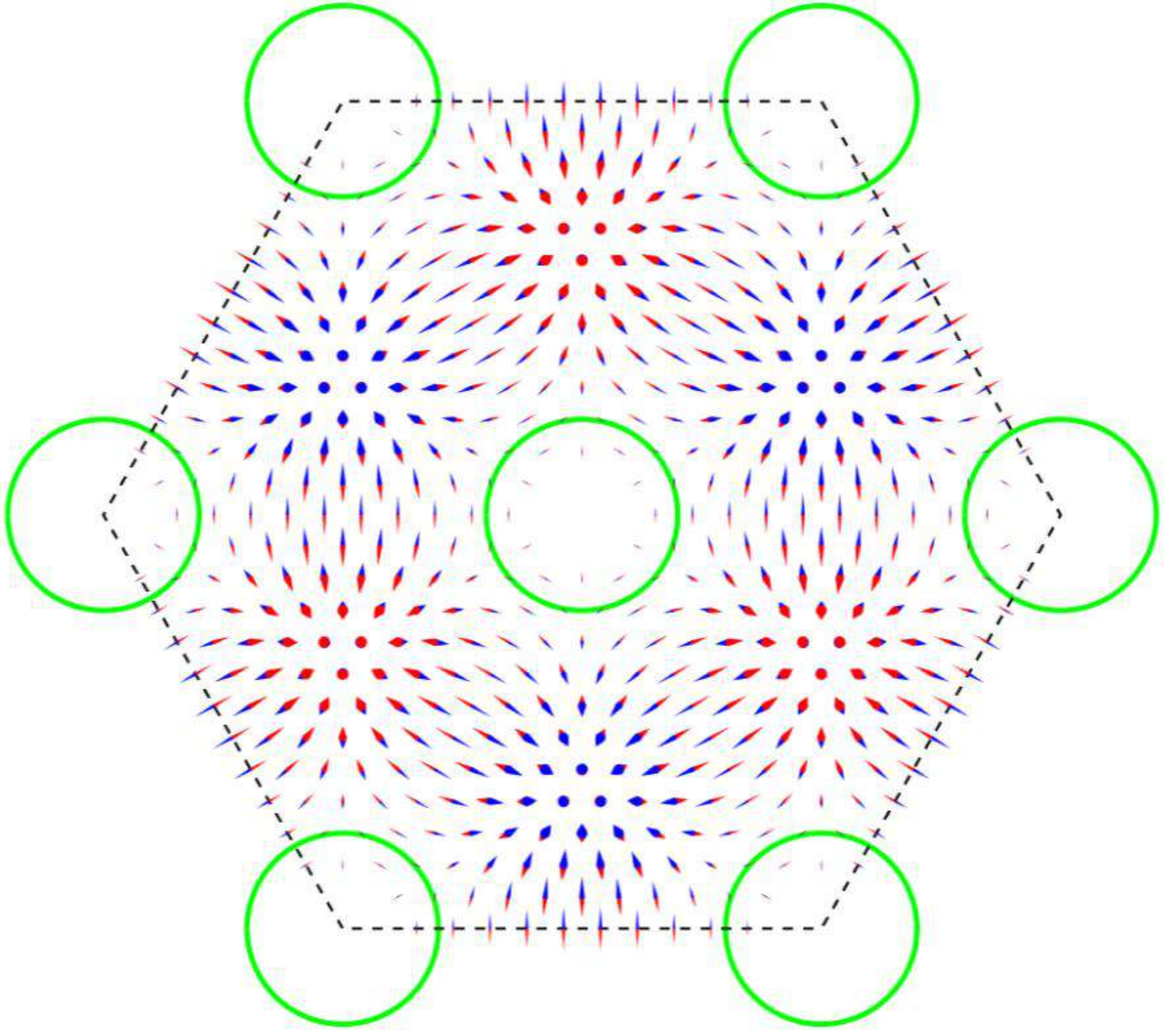


Распределение поля в модах

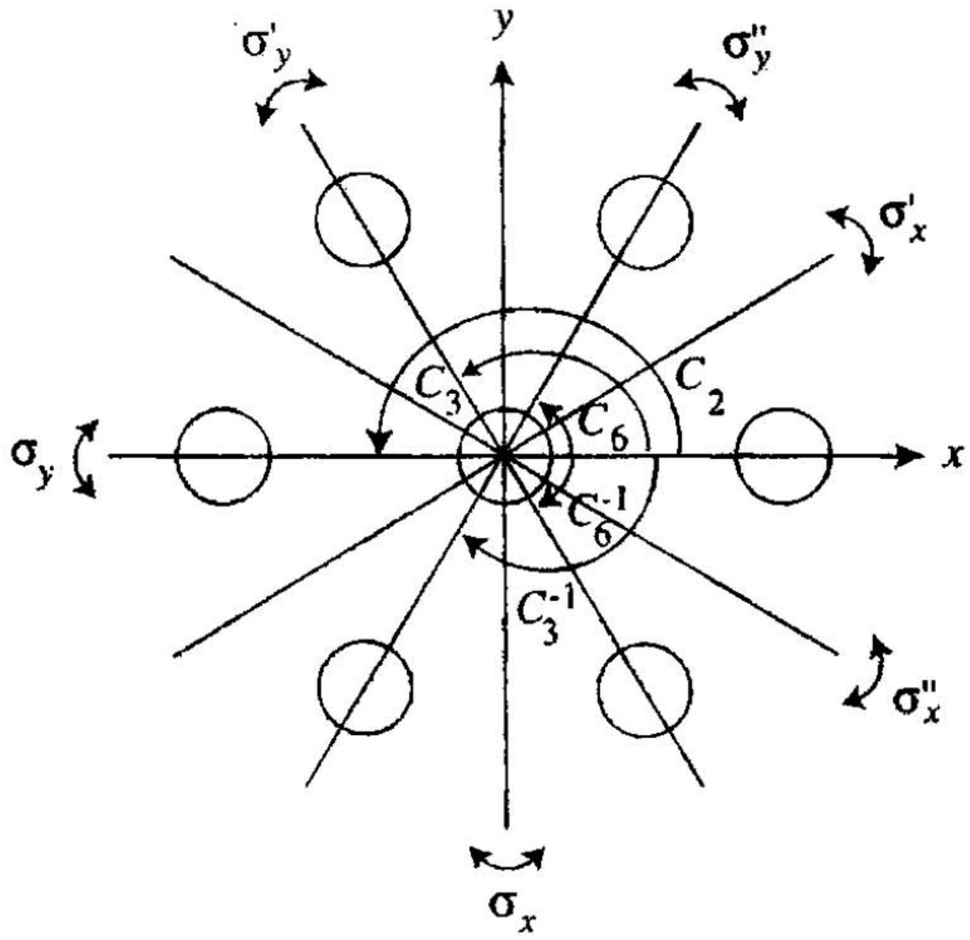
Синглет A_2 — $E_{res} = 843.9\text{-}0.44i$ мэВ



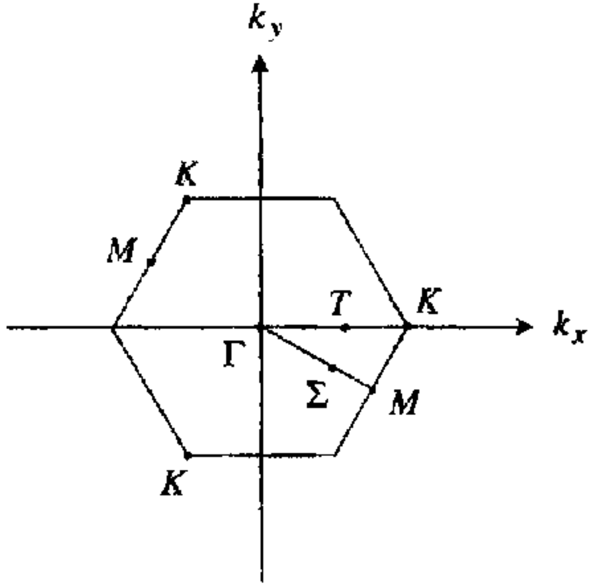
Синглет B_2 — $E_{res} = 898.4\text{-}0.61i$ мэВ



Группа вращательной симметрии C_{6v}



Операции симметрии для двумерной треугольной решетки



C_{6v} point group:

$$C_{6v} = \{E, C_6, C_6^{-1}, C_3, C_3^{-1}, C_2, \sigma_x, \sigma_x', \sigma_x'', \sigma_y, \sigma_y', \sigma_y''\}$$

- Любая собственная функция является неприводимым представлением группы C_{6v}.
- Существуют одномерные и двумерные неприводимые представления
- Одномнерные представляния задаются одной функцией
- Двумерные неприводимые представления задаются двумя функциями; любая линейная комбинация этих собственных функций также является собственной функцией
- Каждое неприводимое представление имеет свою пространственную симметрию, которая выражется набором характров

1D

$$R f_{B_1}(\boldsymbol{r}_{\parallel}) = \chi_{B_1}(R) f_{B_1}(\boldsymbol{r}_{\parallel})$$

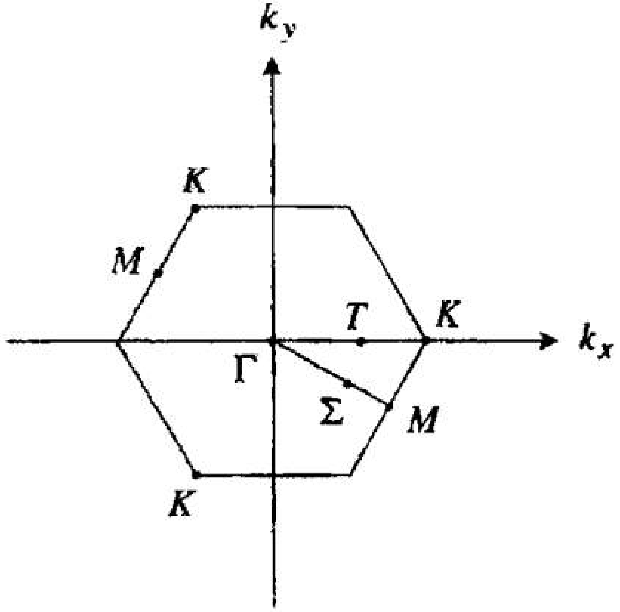
2D

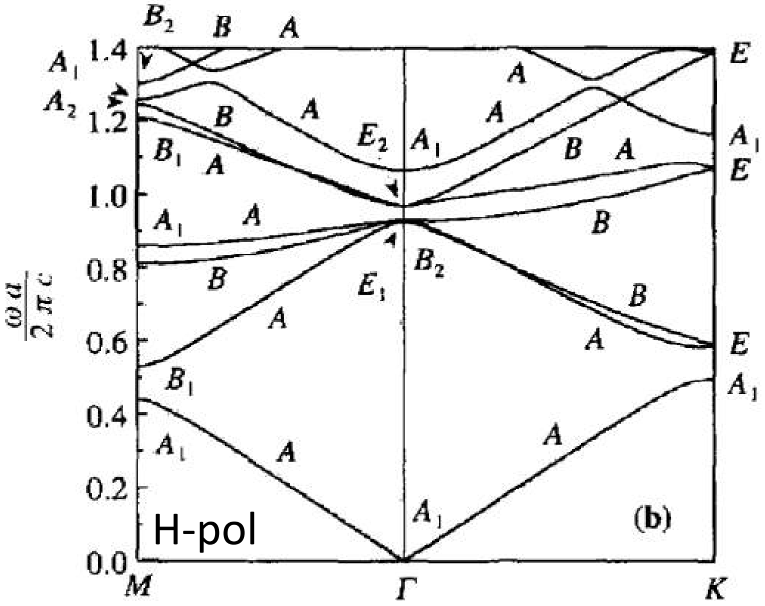
$$R f_E^{(1)}(\boldsymbol{r}_{\parallel}) = A_{11} f_E^{(1)}(\boldsymbol{r}_{\parallel}) + A_{12} f_E^{(2)}(\boldsymbol{r}_{\parallel}),$$
$$R f_E^{(2)}(\boldsymbol{r}_{\parallel}) = A_{21} f_E^{(1)}(\boldsymbol{r}_{\parallel}) + A_{22} f_E^{(2)}(\boldsymbol{r}_{\parallel}).$$
$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \equiv A_{11} + A_{22} = \chi_E(R)$$

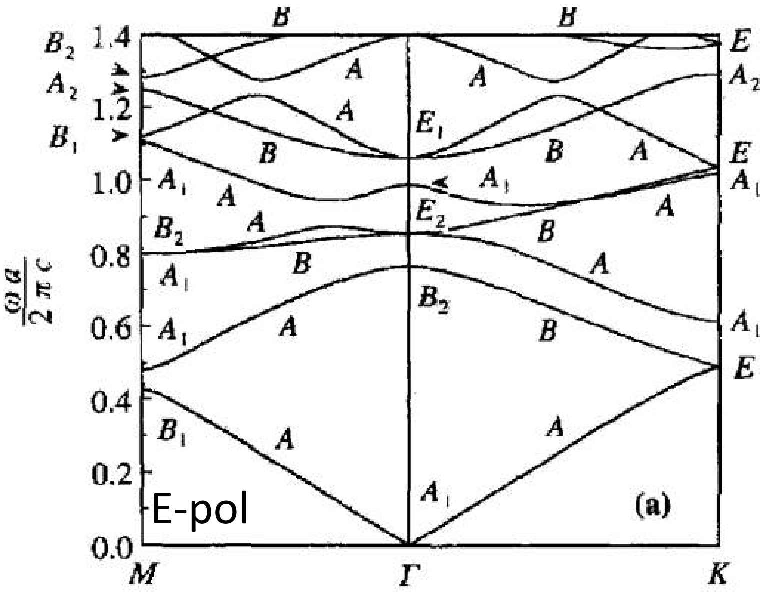
C_{6v}	E	$2C_6$	$2C_3$	C_2	$3\sigma_y$	$3\sigma_x$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	−1	−1
B_1	1	−1	1	−1	1	−1
B_2	1	−1	1	−1	−1	1
E_1	2	1	−1	−2	0	0
E_2	2	−1	−1	2	0	0

Таблица характеров для группы C_{6v}

Basics of group theory





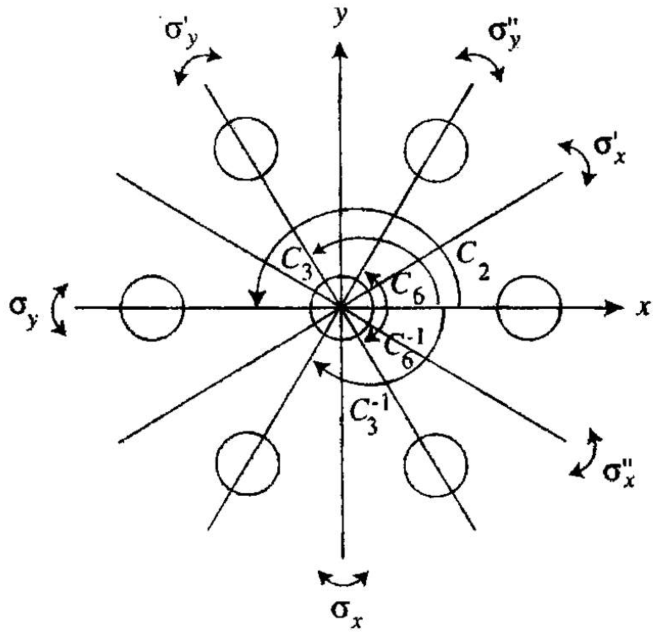


		T	Σ
Γ:	A_1	A	A
	A_2	B	B
	B_1	A	B
	B_2	B	A
	$E_1,\ E_2$	$A+B$	$A+B$
K:	A_1	A	-
	A_2	B	-
	E	$A+B$	-
M:	$A_1,\ B_1$	-	A
	$A_2,\ B_2$	-	B

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	−1
E	2	−1	0

C_{1h}	E	σ
A	1	1
B	1	−1

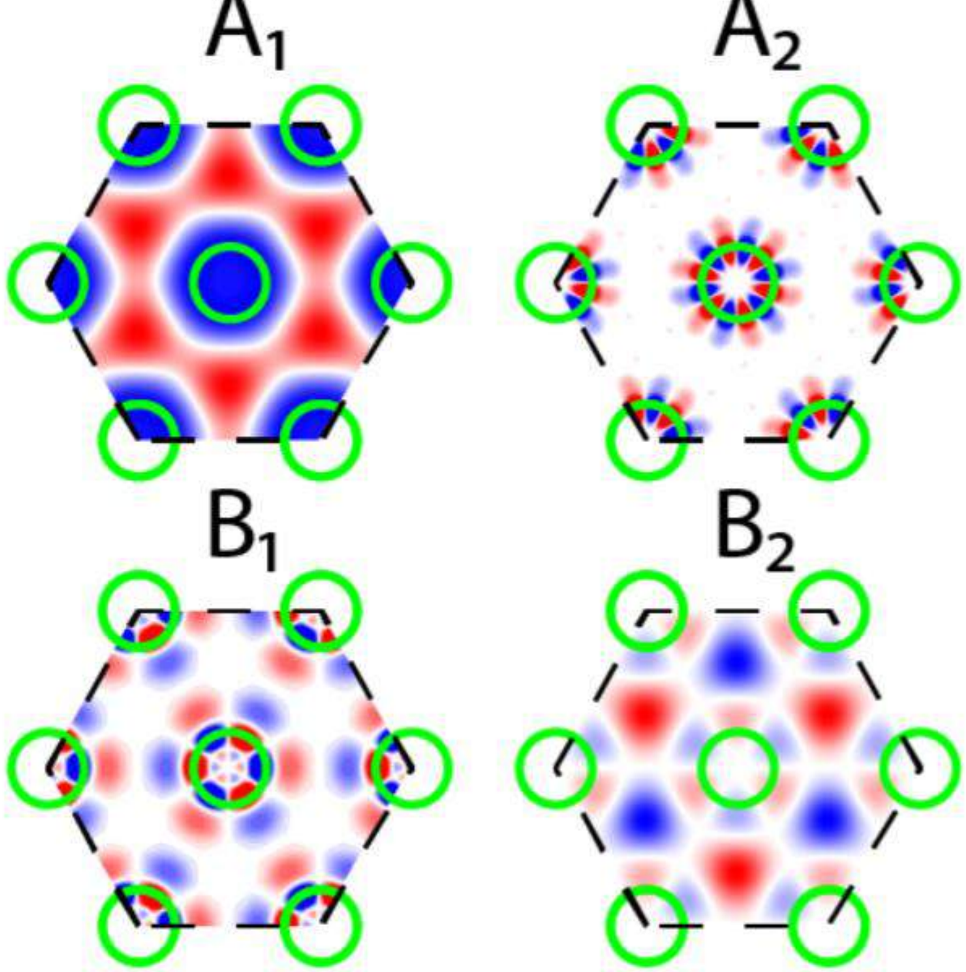
Symmetry of quasiguided modes



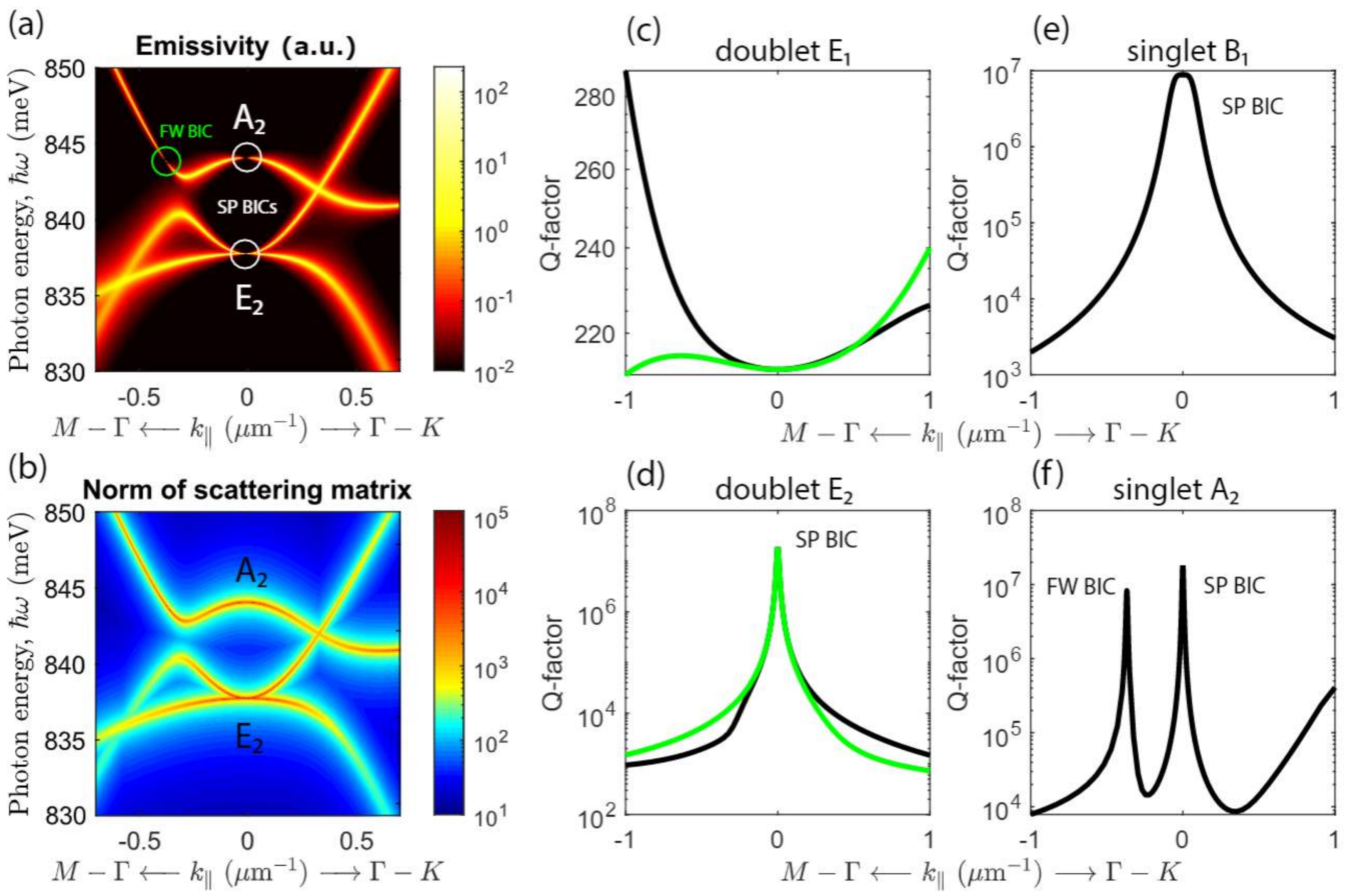
	E	$2C_6$	$2C_3$	C_2	$3\sigma_y$	$3\sigma_x$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	1	-1	-2	0	0
E_2	2	-1	-1	2	0	0

Таблица характеров точечной группы симметрии C_{6v}.

Singlet modes



Bound states in the continuum



Resonances near Γ-point

мода	мера поляризации моды при $k_x = 0$ $k_y = 0$	мера поляризации моды при $k_x = 0.2\,\text{мкм}^{-1}$ $k_y = 0.0$	мера поляризации действующего поля при $k_x = 0.2\,\text{мкм}^{-1}$ $k_y = 0$
A_1	(0.088, 0.912)	(0.167, 0.833)	(0.943, 0.057)
A_2	(1.000, 0.000)	(1.000, 0.000)	(0.999, 0.001)
B_1	(1.000, 0.000)	(0.973, 0.027)	(0.989, 0.011)
B_2	(0.132, 0.868)	(0.926, 0.074)	(0.786, 0.214)
E_1 верхний	(0.848, 0.152)	(0.162, 0.838) и (0.164, 0.836)	(0.171, 0.829) и (0.171, 0.829)
E_1 нижний	(0.374, 0.626)	(0.672, 0.328) и (0.688, 0.312)	(0.627, 0.373) и (0.627, 0.373)
E_2 верхний	t(0.878, 0.122)	(0.146, 0.854) и (0.145, 0.855)	(0.269, 0.731) и (0.272, 0.728)
E_2 нижний	(0.434, 0.566)	(0.995, 0.005) и (0.995, 0.005)	(0.993, 0.007) и (0.994, 0.006)

Таблица 3 — Мера поляризации C собственных мод ФКС, вычисленные для периода $a = 600$ нм, $r/a = 0.2a$. Величина $C = (1,\ 0)$ соответствует чисто горизонтальной поляризации, а $C = (0,\ 1)$ соответствует чисто вертикальной поляризации. При вычислении поляризационной меры C действующего поля (столбец 4) мы усредняем по x- и y-поляризациям падающей плоской волны.

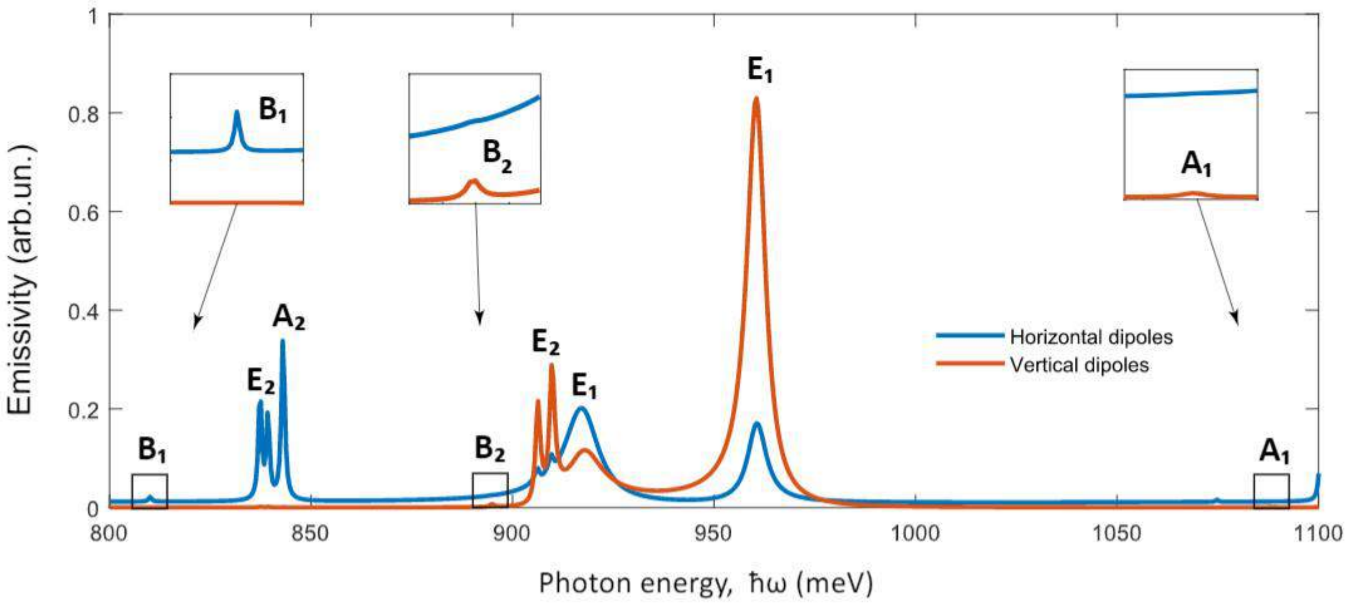


Рисунок 3.11 — Излучательная способность колеблющихся горизонтальных (синяя линия) и вертикальных (красные линии) диполей, равномерно распределенных по излучающему слою в ФКС с $a = 600$ нм, $r/a = 0.2$, $k_x = 0.2\,\text{мкм}^{-1}$, $k_y = 0$.

РНФ
Российский научный фонд

22-12-00351

Спасибо за внимание!