Основы теоретического описания квантовой механики квазичастиц в сверхпроводниках. Уравнения Боголюбова, Андреева, и другие подходы

А.С.Мельников

ACTP MIPT
IPM RAS

Лекция 1

Электроны и дырки в нормальном металле и в сверхпроводнике. Качественная картина.

План

- **Гамильтониан БКШ. Эффективный гамильтониан. Преобразование Боголюбова-Валатина.**

- **Уравнение самосогласования. Синглетные и триплетные состояния. S-, p-, d- и другие состояния куперовских пар. Общая структура волновой функции БКШ.**

- **Неоднородные сверхпроводящие состояния. Уравнения Боголюбова-де Жена. Функции Грина. Уравнения Горькова.**

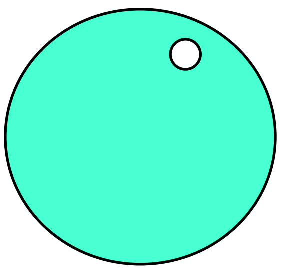
- **Выражения для измеримых величин. Ток заряда и ток тепла. Плотность состояний. Спектр квазичастиц.**

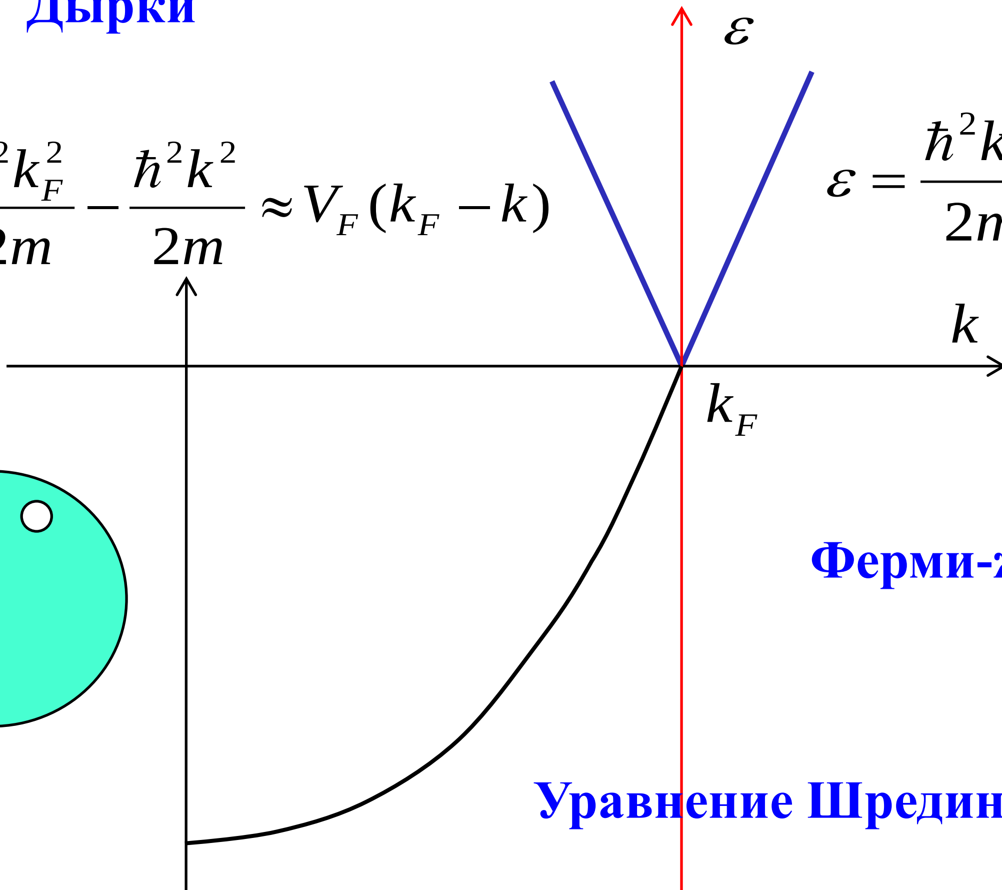
- **Квазиклассическое приближение в сверхпроводниках. Уравнения Андреева, Эйденбергера и Узаделя.**

Электроны и дырки в нормальном металле

Дырки

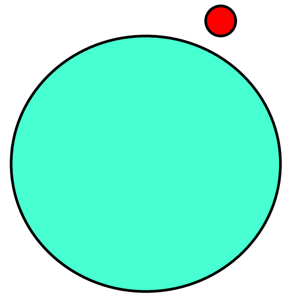
$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \approx V_F(k_F - k)$$





Электроны

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \approx V_F(k - k_F)$$



Ферми-жидкостные эффекты: $\varepsilon = V_F^* \, | k - k_F |$

Уравнение Шредингера:

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) v = \varepsilon v$$

$$u = 0$$

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) u = \varepsilon u$$

$$v = 0$$

Электроны и дырки в нормальном металле

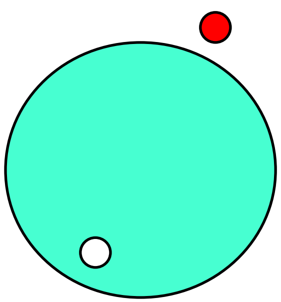
$$\left\langle 0 \middle| \hat{a}_q \hat{a}_k^+ \middle| 0 \right\rangle \neq 0$$

- вероятность рассеяния электрона из состояния $\left| \hat{a}_k^+ \middle| 0 \right\rangle$ в состояние $\left| \hat{a}_q^+ \middle| 0 \right\rangle$

Электроны и дырки в сверхпроводнике. Аномальные средние.

$$\left\langle 0 \middle| \hat{a}_q^+ \hat{a}_k^+ \middle| 0 \right\rangle \neq 0$$

- вероятность рассеяния электрона из состояния $\left| \hat{a}_k^+ \middle| 0 \right\rangle$ в дырочное состояние $\left| \hat{a}_q \middle| 0 \right\rangle$



2 связанных уравнения Шредингера= уравнения Боголюбова

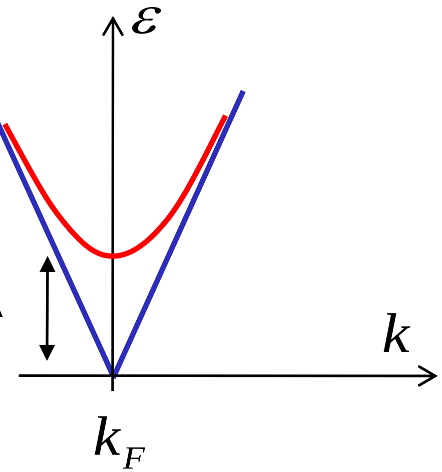
$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) u + \Delta v = \varepsilon u$$

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) v + \Delta u = \varepsilon v$$

Однородное сверхпроводящее состояние:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} e^{i\vec{k}\vec{r}} \qquad \varepsilon = \pm\sqrt{\Delta^2 + \left(\hbar V_F (k - k_F)\right)^2}$$

Сверхпроводящая щель Δ



Низкие температуры: в однородном сверхпроводнике с изотропной щелью квазичастиц нет

Неоднородности щели → **Изменение спектра квазичастиц** → **Информация о типе сверхпроводящего спаривания**

Эксперименты: туннельная спектроскопия, теплопроводность, теплоемкость, поглощение эм волн, спиновая восприимчивость, …….

Кое-какие «мелочи»: магнитное поле, фаза параметра порядка, калибровочная инвариантность, потенциальное рассеяние на неоднородностях, границах, спин

$$\left(-\frac{\hbar^2\left(\nabla-\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right)^2}{2m}-\frac{\hbar^2k_F^2}{2m}+V_{so}+U\right)u+\Delta v=\left(\varepsilon+\beta\vec{H}\vec{\sigma}\right)u$$

$$\left(\frac{\hbar^2\left(\nabla+\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right)^2}{2m}+\frac{\hbar^2k_F^2}{2m}-V_{so}-U\right)v+\Delta^{*}u=\left(\varepsilon+\beta\vec{H}\vec{\sigma}\right)v$$

$$V_{so}=-\frac{e\hbar}{4m^2c^2}\vec{\sigma}\left[\vec{E},\hat{\vec{p}}\right]$$

Еще кое-какие «мелочи»:
Что такое дельта?

Ответ 1: дельта – это именно тот параметр порядка, который появляется в теории типа Гинзбурга-Ландау

Ответ 2: дельта – это самосогласованное поле куперовских пар

Ответ 3: дельта – это вообще-то нелокальный оператор

$$\hat{\Delta}u = \int \Delta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) u(\vec{r}_2) d\vec{r}_2$$

Модель БКШ

$$\hat{H} = \sum \hbar V_F (k - k_F) a^+_{k\sigma} a_{k\sigma} + g \sum a^+_{q\uparrow} a^+_{-q\downarrow} a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow}$$

Коммутационные соотношения $\left\{ a^+_{k\sigma} a_{q\beta} \right\} = \delta_{kq} \delta_{\sigma\beta}$

Метод среднего поля

$$\hat{H} = \sum \hbar V_F (k - k_F) a^+_{k\sigma} a_{k\sigma}$$

$$+ g \sum \left\langle a^+_{q\uparrow} a^+_{-q\downarrow} \right\rangle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow}$$

$$+ g \sum a^+_{q\uparrow} a^+_{-q\downarrow} \left\langle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \right\rangle$$

$$- g \sum \left\langle a^+_{q\uparrow} a_{-k\downarrow} \right\rangle a^+_{-q\downarrow} a_{k\uparrow} + g \sum a^+_{q\sigma} a_{k\sigma} \left\langle a^+_{-q-\sigma} a_{-k-\sigma} \right\rangle$$

Эффективный гамильтониан

$$\hat{H} = \sum \hbar V_F (k - k_F) a_{k\sigma}^{+} a_{k\sigma} + \sum \Delta^{*} a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} + \sum a_{q\uparrow}^{+} a_{-q\downarrow}^{+} \Delta$$

Уравнение самосогласования

$$g \sum_{k} \left\langle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \right\rangle = \Delta$$

Преобразование Боголюбова-Валатина

$$a_{k\uparrow} = u_{k\uparrow}\alpha_{k\uparrow} + v^*_{k\uparrow}\alpha^+_{-k\downarrow} \qquad a^+_{k\uparrow} = u^*_{k\uparrow}\alpha^+_{k\uparrow} + v_{k\uparrow}\alpha_{-k\downarrow}$$

$$a_{k\downarrow} = u_{k\downarrow}\alpha_{k\downarrow} - v^*_{k\downarrow}\alpha^+_{-k\uparrow} \qquad a^+_{k\downarrow} = u^*_{k\downarrow}\alpha^+_{k\downarrow} - v_{k\downarrow}\alpha_{-k\uparrow}$$

$$H = U_0 + \sum_{k\sigma}\varepsilon_k \alpha^+_{k\sigma}\alpha_{k\sigma} \qquad \left\{\alpha^+_{k\sigma}\alpha_{q\beta}\right\} = \delta_{kq}\delta_{\sigma\beta}$$

$$\left|u_{k\sigma}\right|^2 + \left|v_{k\sigma}\right|^2 = 1$$

$$\left|u_{k\sigma}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi_k}{\varepsilon_k}\right)$$

$$\left|v_{k\sigma}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi_k}{\varepsilon_k}\right)$$

$$\xi_k = \hbar V_F (k - k_F)$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 + \left|\Delta\right|^2}$$

$$\frac{|g|}{2V}\sum_k \frac{\Delta}{\varepsilon_k}\tanh\frac{\varepsilon_k}{2T} = \Delta$$

Неоднородные состояния

Введем полевые операторы: $\Psi_\sigma(\vec r) = \sum_k e^{i\vec k \vec r} a_{k\sigma}$

$$\left\{\Psi_\sigma(\vec r)\Psi^+_\beta(\vec r\,')\right\} = \delta_{\sigma\beta}\delta(\vec r - \vec r\,')$$

$$\hat H = \sum \int \Psi^+_\sigma(\vec r)\left(\overbrace{\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec p} - \frac{e}{c}\vec A\right)^2 + U_0(\vec r)}^{\hat H_0} - \mu \right)\Psi_\sigma(\vec r) d^3 r$$

$$+ g\int \Psi^+_\uparrow(\vec r)\Psi^+_\downarrow(\vec r)\Psi_\downarrow(\vec r)\Psi_\uparrow(\vec r) d^3 r$$

$$\hat H = \sum \int \Psi^+_\sigma(\vec r)\left(\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec p} - \frac{e}{c}\vec A\right)^2 + U(\vec r) - \mu \right)\Psi_\sigma(\vec r) d^3 r$$

$$+ \int \Psi^+_\uparrow(\vec r)\Psi^+_\downarrow(\vec r)\Delta(\vec r) d^3 r + \int \Delta^*(\vec r)\Psi_\downarrow(\vec r)\Psi_\uparrow(\vec r) d^3 r$$

BCS mean field theory.
Bogolubov canonical transformation.
No changes in the operator commutation rules

Annihilation and creation electron operators

$$\hat{\Psi}_{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{n} \left(u_{\alpha n}(\vec{r})\hat{c}_{n} + v^{*}_{\alpha n}(\vec{r})\hat{c}^{+}_{n} \right)$$

$$\hat{\Psi}^{+}_{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{n} \left(u^{*}_{\alpha n}(\vec{r})\hat{c}^{+}_{n} + v_{\alpha n}(\vec{r})\hat{c}_{n} \right)$$

Annihilation and creation quasiparticle operators

Inverse transformation

$$\hat{c}_{n} = \sum_{\alpha} \int d^{3}r \left(u^{*}_{\alpha n}(\vec{r})\hat{\Psi}_{\alpha} + v^{*}_{\alpha n}(\vec{r})\hat{\Psi}^{+}_{\alpha} \right)$$

$$\hat{c}^{+}_{n} = \sum_{\alpha} \int d^{3}r \left(u_{\alpha n}(\vec{r})\hat{\Psi}^{+}_{\alpha} + v_{\alpha n}(\vec{r})\hat{\Psi}_{\alpha} \right)$$

Fermi commutation rules:

$$\left\{ c^{+}_{n} c_{m} \right\} = \delta_{nm} \qquad \left\{ c_{n} c_{m} \right\} = 0$$

Fermi commutation rules:

$$\left\{c_n^+ c_m\right\} = \delta_{nm} \qquad \left\{c_n c_m\right\} = 0$$

Orthogonality condition:

$$\sum_\alpha \int \left(u_{\alpha\lambda}(\vec{r})u^*_{\alpha\nu}(\vec{r}) + v_{\alpha\lambda}(\vec{r})v^*_{\alpha\nu}(\vec{r})\right)d^3r = \delta_{\lambda\nu}$$

Complete set of functions:

$$\sum_\lambda u_{\alpha\lambda}(\vec{r})u^*_{\beta\lambda}(\vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\delta_{\alpha\beta}$$

$$\sum_\lambda v_{\alpha\lambda}(\vec{r})u^*_{\beta\lambda}(\vec{r}\,') = 0$$

Bogolubov – de Gennes equations and their symmetry

$$\left(\hat{H}_0 - \mu\right)u_\alpha + \int \Delta_{\alpha\beta}(r,r')v_\beta(r')d^3r' = \varepsilon u_\alpha$$

$$\int \Delta^{+}_{\alpha\beta}(r',r)u_\beta(r')d^3r' + \left(\mu - \hat{H}_0^*\right)v_\alpha = \varepsilon v_\alpha$$

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\Delta_{\beta\alpha}(\mathbf{r}',\mathbf{r})$$

$$\varepsilon \to -\varepsilon$$

$$\begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} v_\alpha^* \\ u_\alpha^* \end{pmatrix}$$

All states come in pairs???

Уравнение самосогласования.
Находим все решения уравнений БдЖ и находим оператор щели.

$$\Delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} U_{\alpha\beta,\delta\gamma}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \sum_n (1-2f(\epsilon_n)) \left(v^*_{\gamma,n}(\mathbf{r}) u_{\delta,n}(\mathbf{r}') - v^*_{\delta,n}(\mathbf{r}') u_{\gamma,n}(\mathbf{r}) \right)$$

$$\Delta_{\alpha\beta}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \Delta_{\alpha\beta}(\vec{r},\vec{R})$$

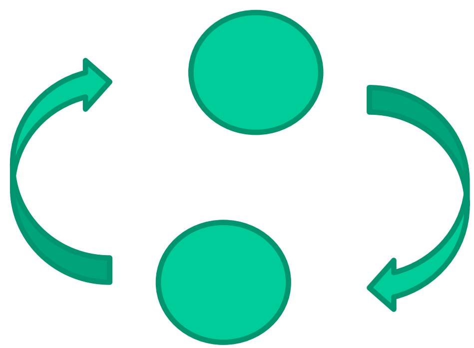
$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

Internal momentum

$$\Delta_{\alpha\beta}(\vec{k},\vec{R})$$

Ginzburg-Landau variable



Общая классификация решений.

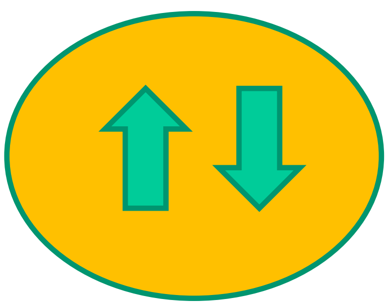
Singlet pairing

$$\Delta_{\alpha\beta}(r,r') = i\sigma_y D(r,r')$$

$$D(r,r') = D(r',r)$$

$$\varepsilon \to -\varepsilon$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -v^* \\ u^* \end{pmatrix}$$



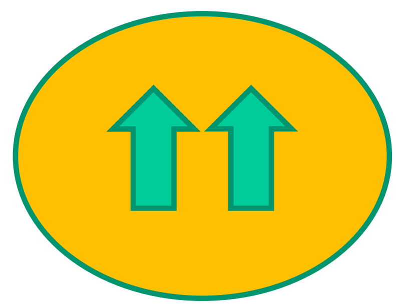
Triplet pairing

$$\Delta_{\alpha\beta}(r,r') = i\sigma_y \vec{\sigma}\vec{D}(r,r')$$

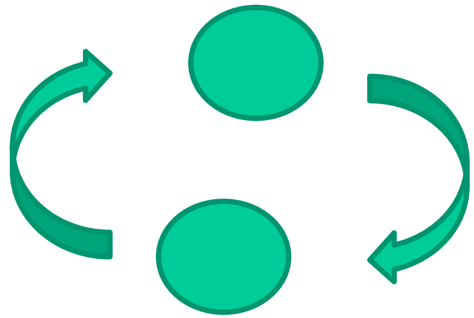
$$\vec{D}(r,r') = -\vec{D}(r',r)$$

$$\varepsilon \to -\varepsilon$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} v^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

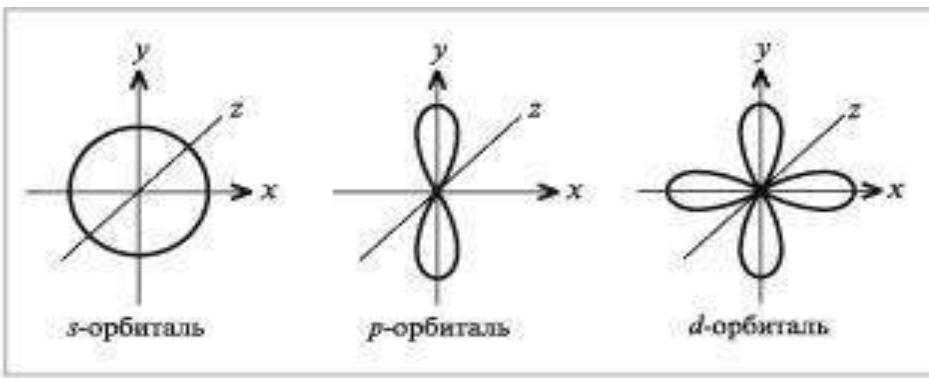


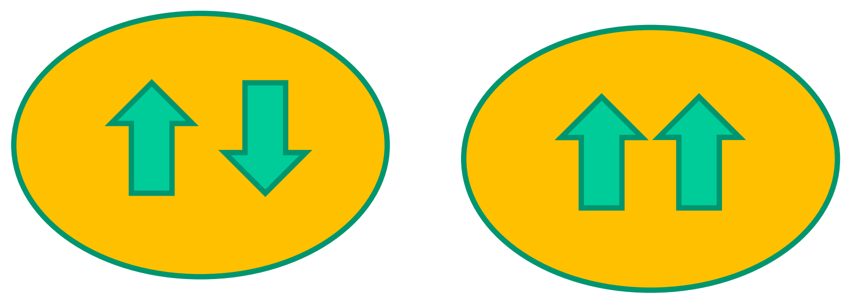
Электроны в сверхпроводнике. Структура куперовских пар



Орбитальная структура.
Момент импульса взаимного движения.
Как в атоме!
s, p, d – орбитали

Спиновая структура.
Для 2х частиц:
синглетные и триплетные состояния





$$\Delta_{\alpha\beta}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2\right) = \Delta_{\alpha\beta}\left(\vec{r}, \vec{R}\right) \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad \vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

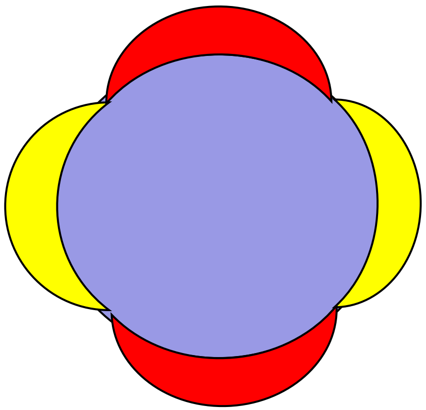
Структура куперовских пар. Разделение масштабов.

$$\Delta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_n c_n \Delta_n\left(\overset{\lambda_F}{\overset{\uparrow}{\vec{k}}}, \underset{\xi}{\underset{\searrow}{\vec{R}}}\right)$$

$$\xi >> \lambda_F$$

Анизотропное сверхпроводящее спаривание в ВТСП

Анизотропия сверхпроводящей щели в импульсном пространстве



$$\Delta = \frac{\Delta_0 k_x k_y}{k_F^2}$$

Последствия:

Квазичастицы выживают лучше при низких температурах

Midgap states

Impurity induced quasiparticle states

Некоторое отступление.
Как устроена настоящая полная волновая функция электронной системы в нормальном металле и сверхпроводнике?

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\xi_1) & \psi_1(\xi_2) & \dots & \dots & \psi_1(\xi_N) \\ \psi_2(\xi_1) & \psi_2(\xi_2) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_N(\xi_1) & \dots & \dots & \dots & \psi_N(\xi_N) \end{vmatrix}$$

$$\xi = (\vec{r}, s)$$

$$\Psi = \hat{A}\psi(\xi_1, \xi_2)\psi(\xi_3, \xi_4)\psi(\xi_5, \xi_6)\dots$$

А если число частиц нечетно?

Функции Грина. Уравнения Горькова.

$$G(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\sum_{\lambda}\frac{u_\lambda(\vec{r}_1)u_\lambda^*(\vec{r}_2)}{\varepsilon-\varepsilon_\lambda}$$

$$F(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\sum_{\lambda}\frac{v_\lambda(\vec{r}_1)u_\lambda^*(\vec{r}_2)}{\varepsilon-\varepsilon_\lambda}$$

$$\left(\hat{H}_0-\mu-\varepsilon\right)G(\vec{r}_1,\vec{r}_2)+\Delta(\vec{r}_1)F(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=-\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

$$\left(\mu-\hat{H}_0^*-\varepsilon\right)F(\vec{r}_1,\vec{r}_2)+\Delta^*(\vec{r}_1)G(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=0$$

Выражения для измеримых величин. Ток заряда.

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{ie}{2m}\sum_{\sigma}\left\{\left\langle\left(\nabla\psi_{\sigma}^{+}(\mathbf{r})\right)\psi_{\sigma}(\mathbf{r}) - \psi_{\sigma}^{+}(\mathbf{r})\nabla\psi_{\sigma}(\mathbf{r})\right\rangle\right\} - \frac{e^2}{m}\mathbf{A}(\mathbf{r})\sum_{\sigma}\left\langle\psi_{\sigma}^{+}(\mathbf{r})\psi_{\sigma}(\mathbf{r})\right\rangle.$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{ie}{m}\sum_{\nu}\left\{\left(u_{\nu}\nabla\overset{*}{u}_{\nu} - \overset{*}{u}_{\nu}\nabla u_{\nu} + 2ie\mathbf{A}\,|u_{\nu}|^2\right) f\left(\frac{\varepsilon_{\nu}}{T}\right) + \left(\overset{*}{v}_{\nu}\nabla v_{\nu} - v_{\nu}\nabla\overset{*}{v}_{\nu} + 2ie\mathbf{A}\,|v_{\nu}|^2\right) f\left(-\frac{\varepsilon_{\nu}}{T}\right)\right\}.$$

$$\downarrow$$

$$\vec{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc}\vec{A}$$

Уравнение Лондонов

Теплопроводность.

$$Q = -\kappa \nabla T$$

$$Q = \frac{\hbar}{m} \mathrm{Re} \sum_n \varepsilon_n \left(u_n^* \left(-i\nabla - \frac{e}{c}\vec{A} \right) u_n - v_n^* \left(-i\nabla + \frac{e}{c}\vec{A} \right) v_n \right) f_n$$

$$\kappa \sim e^{-\Delta/T}$$

Методы решения.

$$\left(-\frac{\hbar^2\left(\nabla-\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right)^2}{2m}-\frac{\hbar^2k_F^2}{2m}+U\right)u+\Delta v=(\varepsilon\pm\beta H)u$$

$$\left(\frac{\hbar^2\left(\nabla+\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right)^2}{2m}+\frac{\hbar^2k_F^2}{2m}-U\right)v+\Delta^* u=(\varepsilon\pm\beta H)v$$

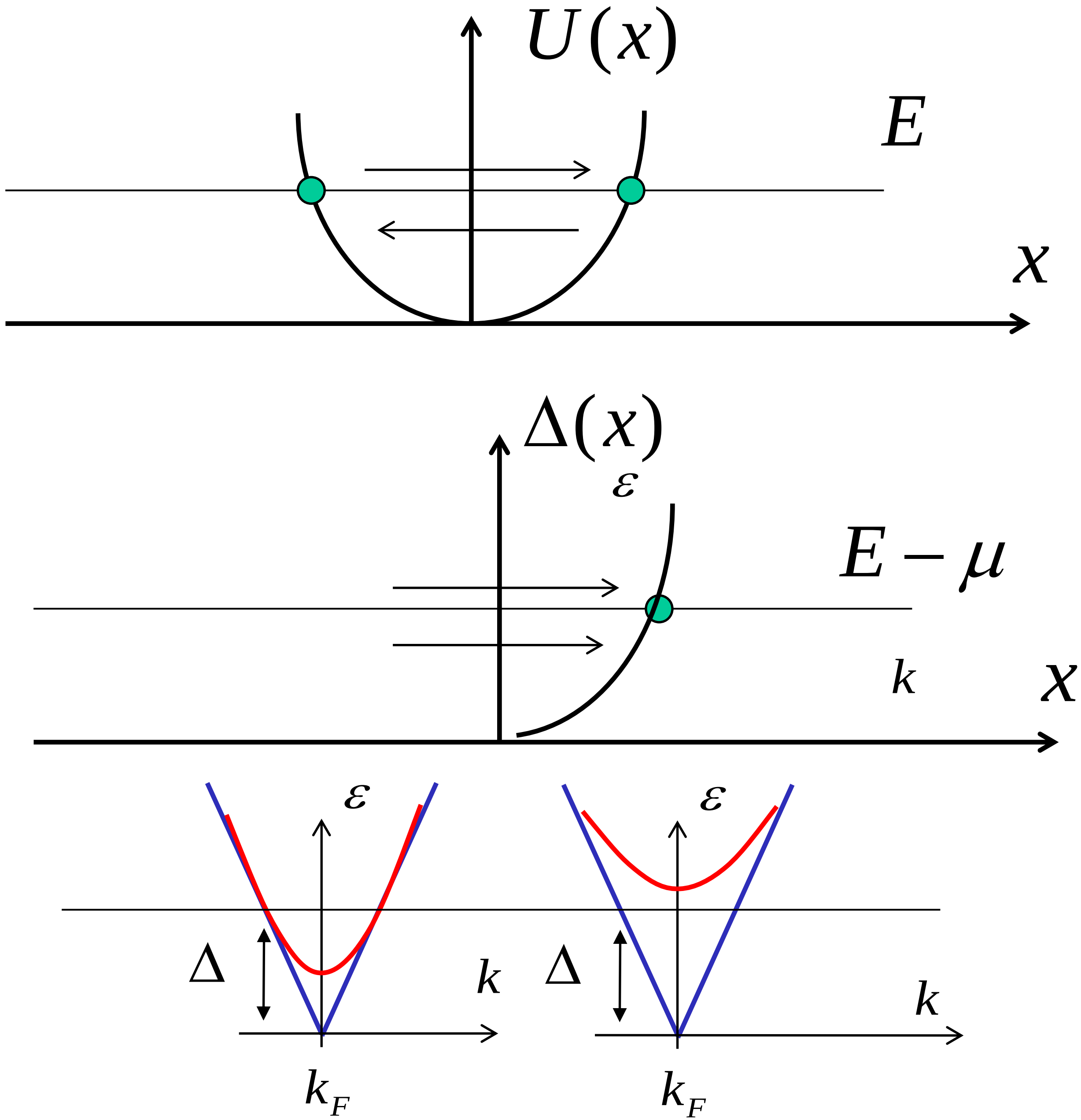
Масштаб неоднородности сверхпроводящей щели

$$\xi=\frac{\hbar V_F}{\Delta}$$

Квазиклассическое приближение:

$$\hat{\Psi}=(u,v)=\hat{\psi}e^{iS} \qquad |\nabla S|=k_F>>\frac{1}{\xi}$$

Как устроен эйконал и точки поворота?

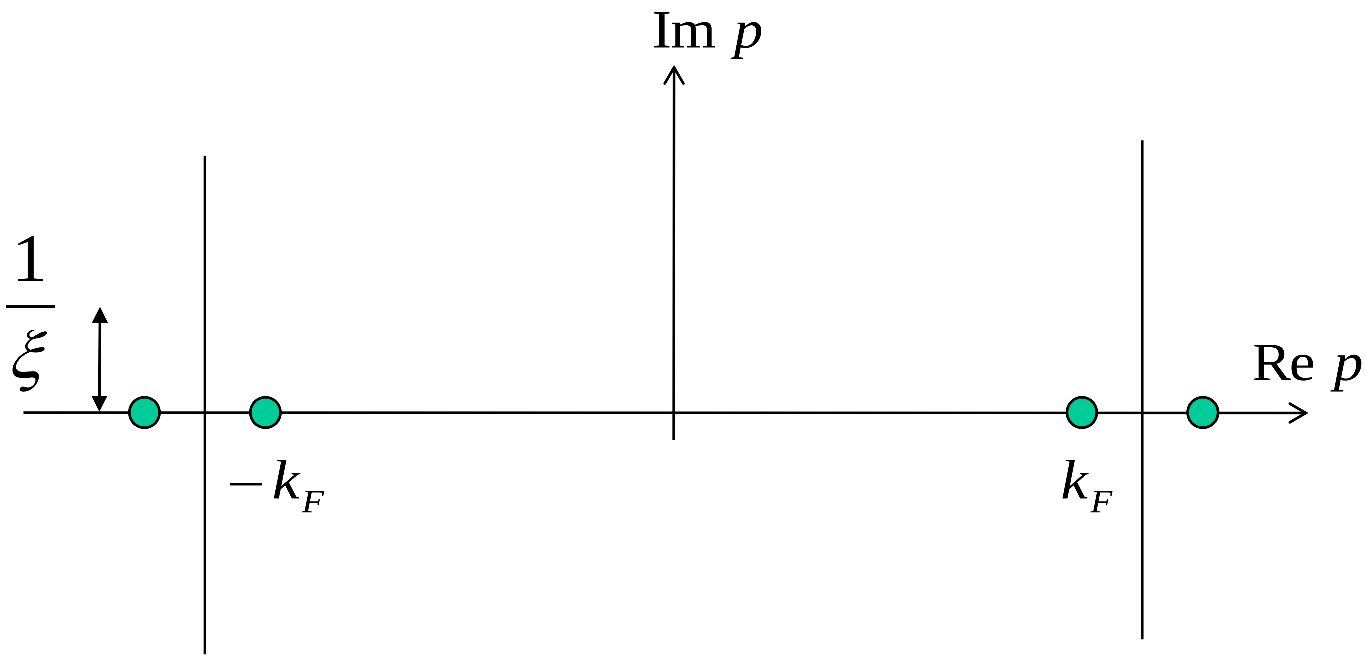


$$k \to -k$$

$$k_F \to k_F$$

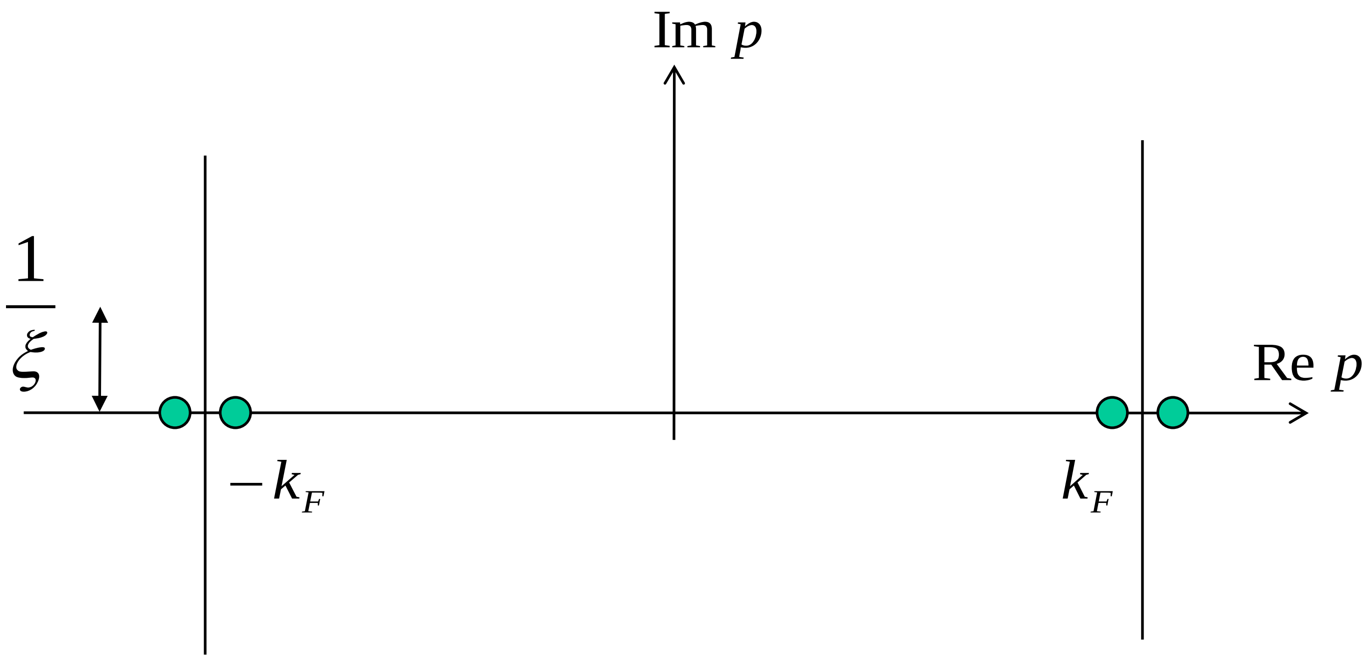
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S_x^{'}$$



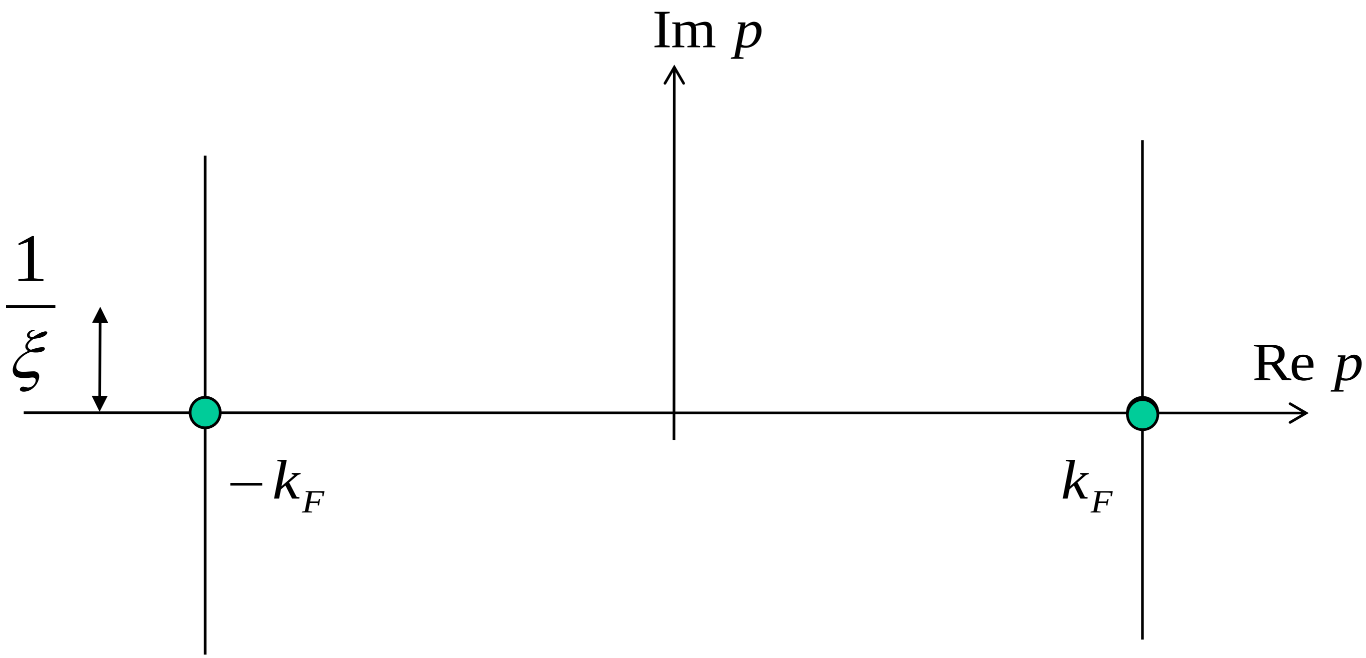
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S_x'$$



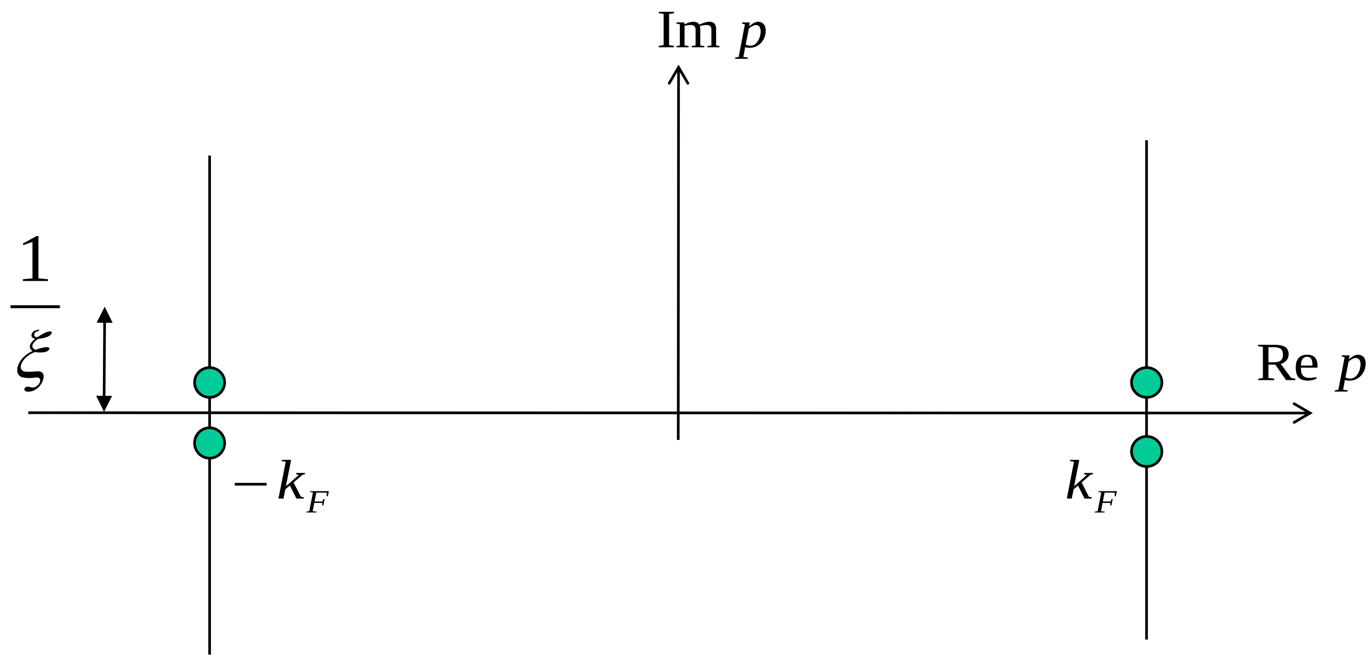
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S_x^{'}$$



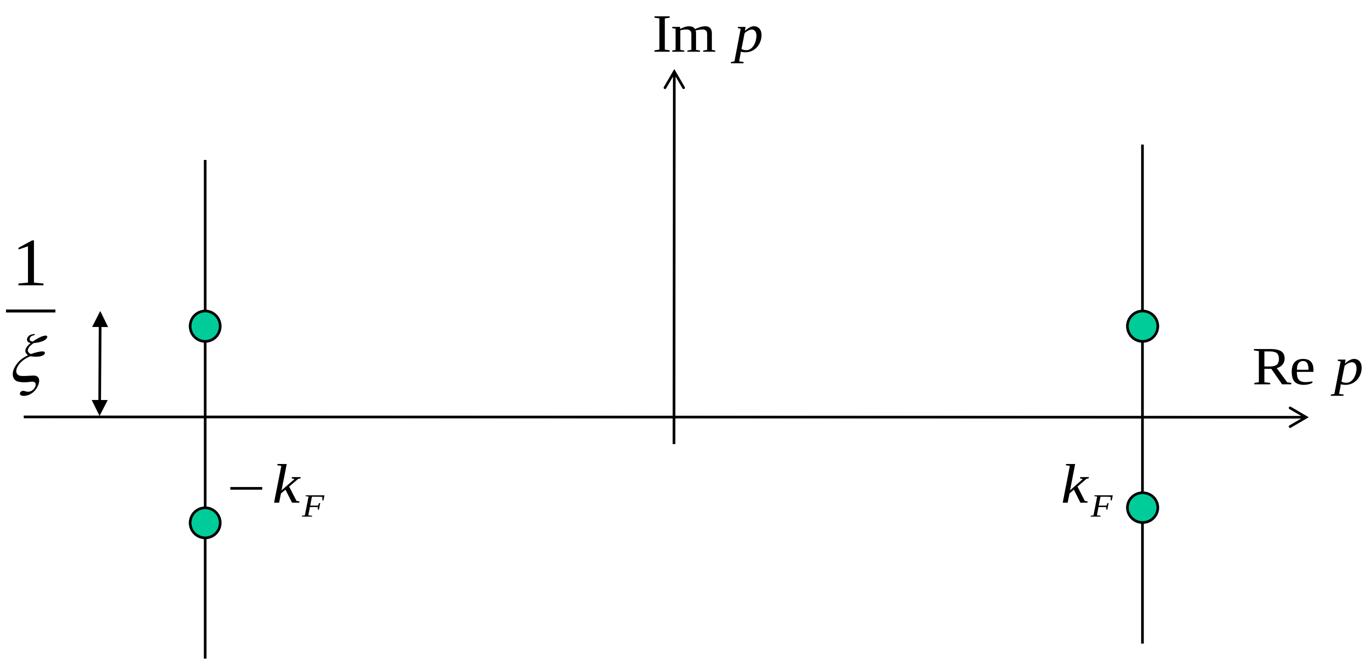
Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S_x'$$



Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S_x'$$



Еще особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

Не учитываем искривление траекторий. Почему?

Масштабы искривления много больше длины когерентности.

Достаточно ли этого?

Не думаем про нормальное отражение от неоднородной щели. Почему?

$$\delta p \sim F\delta t \sim \delta t \cdot \Delta/\xi \sim \left(\xi/V_F\right)\cdot \Delta/\xi \sim \hbar/\xi << p_F$$

Quasiclassical approximation. 2D

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-\varepsilon_\perp\right]u+V(\mathbf{r})u+\Delta(\mathbf{r})v=\varepsilon u$$

$$-\left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-\varepsilon_\perp\right]v-V(\mathbf{r})v+\Delta^*(\mathbf{r})u=\varepsilon v$$

$$\check{\Psi}(\mathbf{r})=\binom{u}{v}=\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}e^{i\mathbf{pr}/\hbar}\check{\psi}(\mathbf{p})d^2\mathbf{p}$$

$$\mathbf{p}\ =\ p(\cos\theta_p,\sin\theta_p)\ =\ p\mathbf{p}_0$$

$$\hat{\mathbf{r}}=i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}=i\hbar\left(\mathbf{p}_0\frac{\partial}{\partial p}+\frac{i}{p}\{[\mathbf{z}_0,\mathbf{p}_0],\hat{\mu}\}\right)$$

$$\hat{x}=i\hbar\cos\theta_p\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{p}-\frac{i\hbar}{2p}\left\{\sin\theta_p,\frac{\partial}{\partial\theta_p}\right\}$$

$$\hat{y}=i\hbar\sin\theta_p\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{p}+\frac{i\hbar}{2p}\left\{\cos\theta_p,\frac{\partial}{\partial\theta_p}\right\}$$

$$\hat{x}\simeq i\hbar\cos\theta_p\frac{\partial}{\partial q}-\frac{i}{2k_\perp}\left\{\sin\theta_p,\frac{\partial}{\partial\theta_p}\right\}$$

$$p=\hbar k_\perp+q\ (|q|\ll\hbar k_\perp)$$

$$\hat{y}\simeq i\hbar\sin\theta_p\frac{\partial}{\partial q}+\frac{i}{2k_\perp}\left\{\cos\theta_p,\frac{\partial}{\partial\theta_p}\right\}$$

Quasiclassical approximation. 2D

$$\hat{\Psi}(\vec{p}) = \frac{1}{k_\perp}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(|\vec{p}|-\hbar k_\perp)s/\hbar}\hat{\psi}(s,\theta_p)ds$$

$$k_\perp = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}$$

$$\vec{k}_\perp = k_\perp(\cos\theta_p, \sin\theta_p)$$

$$\hat{x} \simeq s\cos\theta_p - \frac{i}{2k_\perp}\left\{\sin\theta_p, \frac{\partial}{\partial\theta_p}\right\}$$

$$\hat{y} \simeq s\sin\theta_p + \frac{i}{2k_\perp}\left\{\cos\theta_p, \frac{\partial}{\partial\theta_p}\right\}$$

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{e^{ik_z z}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik_\perp r\cos(\theta_p-\theta)}\hat{\psi}(r\cos(\theta_p-\theta),\theta_p)d\theta_p$$

Quasiclassical approximation. 2D

$$\breve{\psi}(s,\theta_p) = e^{iS_e(\theta_p)}\breve{g}(s,\theta_p)$$

$$\hat{H}g = Eg$$

$$\hat{H} = -i\hbar V_\perp \tau_z \frac{\partial}{\partial s} + \tau_x \operatorname{Re}\Delta(s) - \tau_y \operatorname{Im}\Delta(s)$$

$$\begin{aligned} x &= s\cos\theta_p - b\sin\theta_p \\ y &= s\sin\theta_p + b\cos\theta_p \end{aligned}$$

Прицельный параметр траектории

$$b(\theta_p) = -\frac{1}{k_\perp}\frac{\partial S_e}{\partial \theta_p}$$

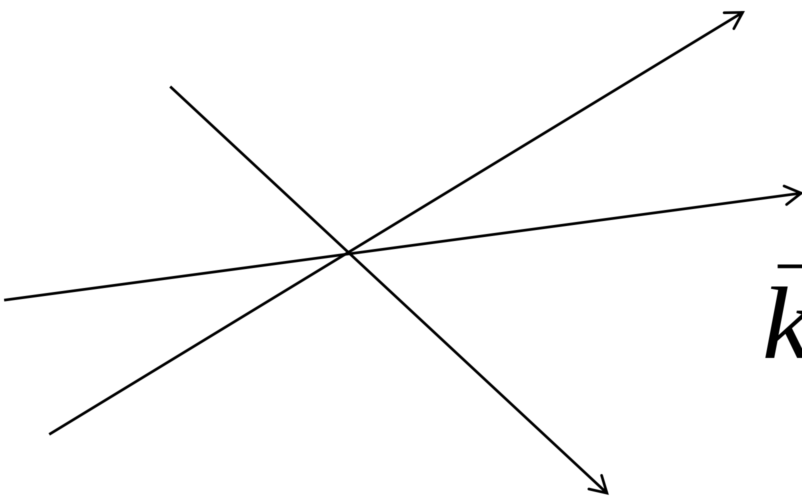
$$\frac{\mu}{k_\perp} = b$$

$$\int_0^{2\pi} \mu(\theta_p)d\theta_p = 2\pi(n+\beta)$$

Квазиклассическое приближение. Уравнения Андреева.

$$\left(-i\hbar\vec{V}_F\left(\nabla-\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right)+U\right)u+\Delta v=\left(\varepsilon\pm\beta H\right)u$$

$$\left(i\hbar\vec{V}_F\left(\nabla+\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right)-U\right)v+\Delta^{*}u=\left(\varepsilon\pm\beta H\right)v$$



$\vec{k}_F$

Недостатки:

Неучет отклонений траекторий в магнитном поле,

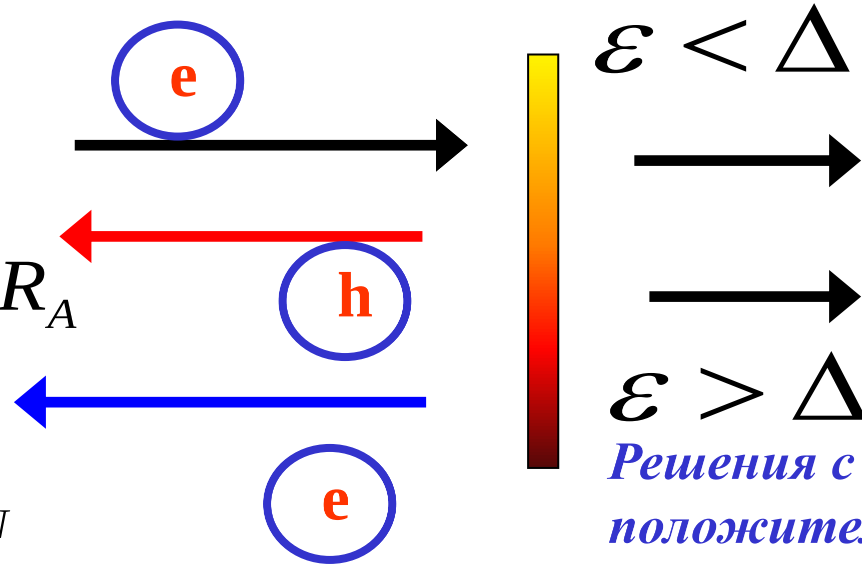
Прецессия траекторий (неточный backscattering при андреевском отражении)

SIN граница. Постановка задачи.

$$\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}-\frac{\hbar^2k_F^2}{2m}+\hbar V_F Z\delta(z)\right)u+\Delta v=\varepsilon u$$

$$\left(\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+\frac{\hbar^2k_F^2}{2m}-\hbar V_F Z\delta(z)\right)v+\Delta^* u=\varepsilon v$$

$$T=\frac{1}{1+Z^2}$$ *= вероятность прохождения электрона через барьер*



$\varepsilon<\Delta$ *Затухающие решения*

$$\Psi\sim e^{-z/\xi}$$

Амплитуда андреевского отражения $=R_A$

Амплитуда нормального отражения $=R_N$

$\varepsilon>\Delta$

Решения с положительной групповой скоростью

$$\xi=\frac{\hbar V_F}{\Delta}$$

SIN граница. Коэффициенты прохождения и отражения.

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_F z} + R_N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F z} + R_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_F z}$$

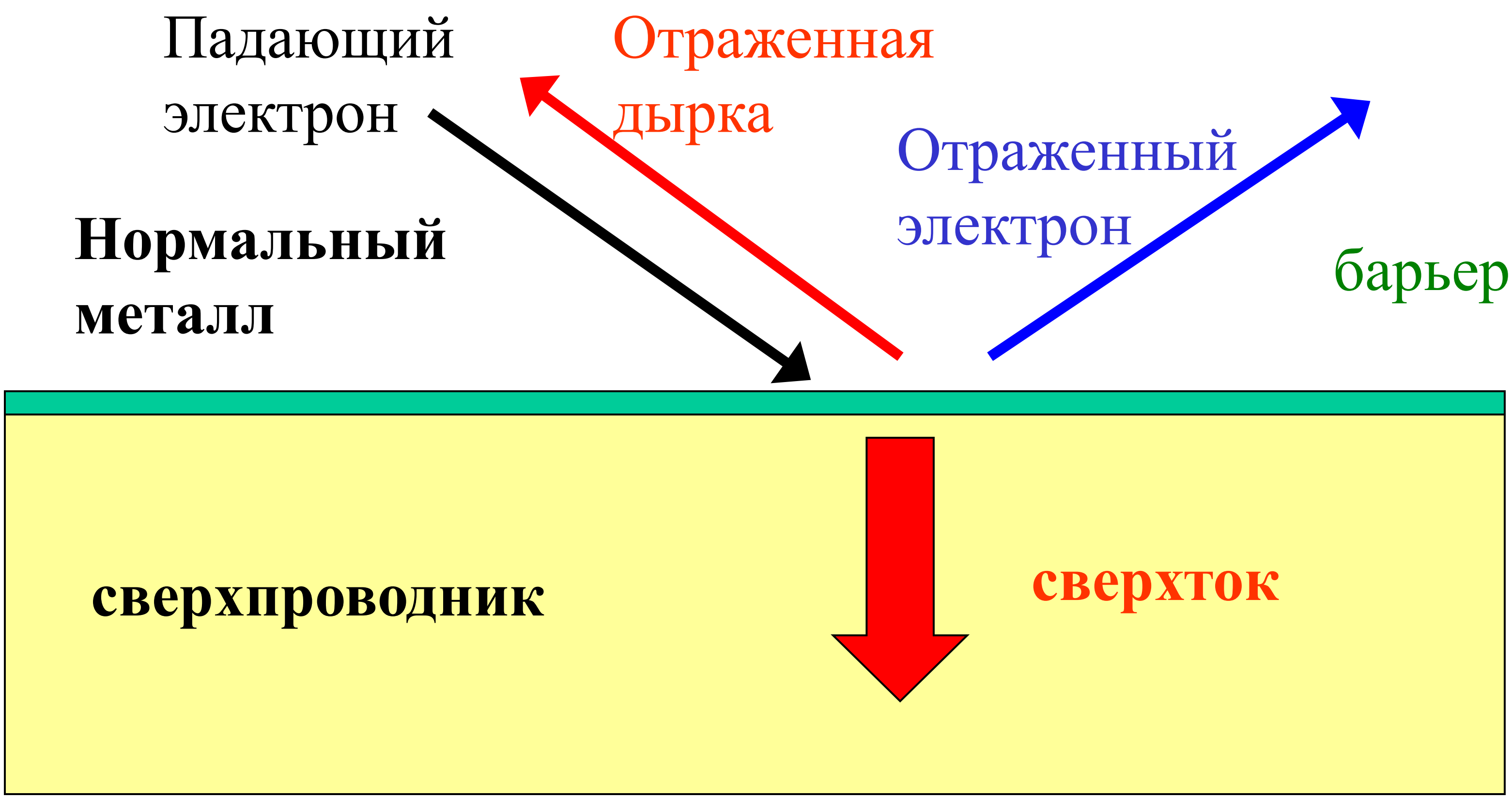
$$Z = 0 \qquad \varepsilon < \Delta \qquad R_A = -e^{i\arccos(\varepsilon/\Delta) + i\varphi}$$

$$\varepsilon > \Delta \qquad R_A = -e^{i\varphi}\left(\frac{\varepsilon}{\Delta} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)^2 - 1} \right)$$

$$Z >> 1 \qquad \varepsilon < \Delta \qquad R_A^2 \sim Z^{-4} = T^2 << 1$$

Двухчастичный процесс туннелирования.

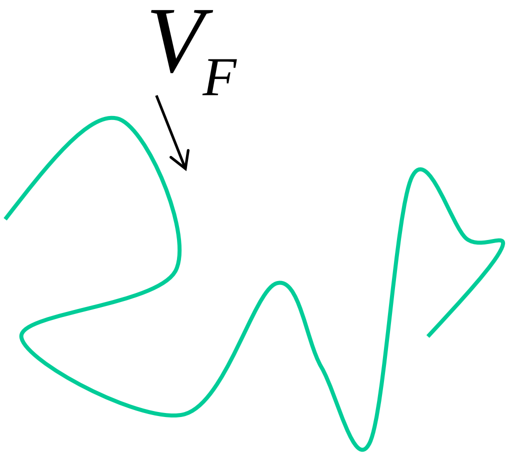
Андреевское отражение



Транспорт тепла. SNSNS структуры – промежуточное состояние (А.Ф.Андреев 1964)

Как влияет на эту картину рассеяние на примесях?

S-спаривание



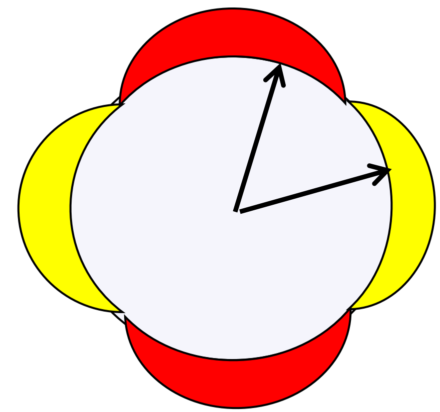
$$V_F t \sim \xi$$

$$\sqrt{Dt} \sim L$$

$$L \sim \sqrt{\frac{D\xi}{V_F}} \sim \sqrt{\ell \xi}$$

Tc не меняется – теорема Андерсона

Спаривание с нулями щели



$$\Delta = \frac{\Delta_0 k_x k_y}{k_F^2}$$

Подавление сверхпроводимости

Квазиклассическое приближение в уравнениях для функций Грина.

$$k_F >> \frac{1}{\xi}$$

Уравнения Эйленбергера.

Грязный предел.

$$\ell << \xi$$

Уравнения Узаделя.

Квазиклассическое приближение в уравнениях для функций Грина.

$$\left\{i\omega - \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p} - \frac{i}{2}\nabla_{\mathbf{R}} + m\mathbf{v}_s\left(\mathbf{R} + \frac{i}{2}\nabla_{\mathbf{p}}\right)\right]^2 + \mu\right\}G_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + \\ + \Delta\left(\mathbf{R} + \frac{i}{2}\nabla_{\mathbf{p}}\right)F_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = 1,$$

$$\left\{i\omega + \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p} - \frac{i}{2}\nabla_{\mathbf{R}} - m\mathbf{v}_s\left(\mathbf{R} + \frac{i}{2}\nabla_{\mathbf{p}}\right)\right]^2 - \mu\right\}F_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + \\ + \Delta\left(\mathbf{R} + \frac{i}{2}\nabla_{\mathbf{p}}\right)G_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = 0,$$

$$\Delta(\mathbf{R}) = |g|\, T\sum_\omega \int F_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{p})\,\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}.$$

Квазиклассическое приближение в уравнениях для функций Грина.

$$\left[i\omega - \xi + \frac{i}{2} v_0 \mathbf{n}\nabla_{\mathbf{R}} - p_0 \mathbf{n}\mathbf{v}_s\left(\mathbf{R} + \frac{i}{2}\mathbf{n}\, v_0\, \frac{d}{d\xi}\right)\right] G_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{n}, \xi) + \\ + \Delta\left(\mathbf{R} + \frac{i}{2}\mathbf{n} v_0 \frac{d}{d\xi}\right) F_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{n}, \xi) = 1,$$

$$\left[i\omega + \xi - \frac{i}{2} v_0 \mathbf{n}\nabla_{\mathbf{R}} - p_0 \mathbf{n}\mathbf{v}_s\left(\mathbf{R} + \frac{i}{2}\mathbf{n}\, v_0 \frac{d}{d\xi}\right)\right] F_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{n}, \xi) + \\ + \Delta\left(\mathbf{R} + \frac{i}{2}\mathbf{n}_0 v \frac{d}{d\xi}\right) G_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{n}, \xi) = 0,$$

$$f(t) = \int f(\xi)\, e^{i\xi t} \frac{d\xi}{2\pi}.$$

$$\left[i\omega + i\frac{d}{dt} + \frac{i}{2} v_0 \mathbf{n}\nabla_{\mathbf{R}} - p_0 \mathbf{n}\mathbf{v}_s\left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{n} v_0 t\right)\right] G_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{n}, t) + \\ + \Delta\left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{n} v_0 t\right) F_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{n}, t) = \delta(t),$$

$$\left[i\omega - i\frac{d}{dt} - \frac{i}{2} v_0 \mathbf{n}\nabla_{\mathbf{R}} - p_0 \mathbf{n}\mathbf{v}_s\left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{n} v_0 t\right)\right] F_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{n}, t) + \\ + \Delta\left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{n} v_0 t\right) G_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{n}, t) = 0.$$

Некоторые итоги

- В сверхпроводнике надо заменить одночастичное уравнение Шредингера на уравнение БдЖ и жить дальше

- Иногда может возникнуть вопрос - как устроен потенциал сверхпроводящей щели? – тогда придется решать нелинейную задачу и разбираться с устройством взаимодействия электронов

- можно пойти дальше и понизить порядок производных в БдЖ за счет квазиклассики

- Учет рассеяния потребует более сложных уравнений для средних по беспорядку функций Грина